

R. BRICARD

## Sur un théorème de Mannheim

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 10  
(1910), p. 128-130

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1910\\_4\\_10\\_\\_128\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__128_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1910, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[K'13a]

SUR UN THÉORÈME DE MANNHEIM ;

PAR M. R. BRICARD.

---

Les *Nouvelles Annales* ont publié en 1908, comme question à résoudre (<sup>1</sup>), l'énoncé d'un théorème retrouvé dans les papiers laissés par A. Mannheim. Le voici :

*On donne quatre plans. On mène une droite D que les quatre plans partagent en des segments proportionnels à des segments donnés. Par les points où D rencontre les plans, on leur élève des perpendiculaires et l'on construit la seconde droite  $\Delta$  qui rencontre ces perpendiculaires. Le plan mené par D parallèlement à  $\Delta$  est parallèle à une droite fixe, quelle que soit la position de D.*

On constate aisément que D peut avoir une direction quelconque. D'autre part, les perpendiculaires aux quatre plans ont des directions fixes. Ces remarques permettent de simplifier légèrement l'énoncé et de lui donner la forme suivante :

*On considère quatre droites  $M_1, M_2, M_3, M_4$ , de directions fixes. Soient D et  $\Delta$  les deux droites qui les rencontrent toutes les quatre. Si les segments déterminés sur l'une de ces droites, D par exemple, sont proportionnels à des segments donnés, un plan parallèle à D et  $\Delta$  est parallèle à une droite fixe.*

---

(<sup>1</sup>) *Nouvelles Annales*, 4<sup>e</sup> série, t. VIII, question 2111.

On voit quelle est l'élégance de la conclusion, symétrique par rapport à  $D$  et  $\Delta$ , alors que ces deux droites jouent des rôles différents dans l'hypothèse.

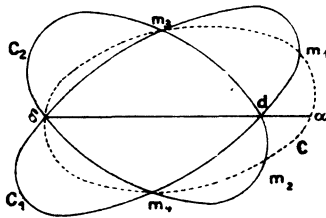
Il y a lieu de croire que l'illustre géomètre a déduit cette proposition de considérations cinématiques, qu'il serait intéressant de reconstituer. Je vais donner une démonstration directe.

Rendons d'abord l'énoncé projectif. A cet effet, désignons par  $m_1, m_2, m_3, m_4, d, \delta$  les points où les droites  $M_1, M_2, M_3, M_4, D, \Delta$  rencontrent respectivement le plan de l'infini. En remplaçant ce dernier par un plan quelconque, on se trouve en présence de l'énoncé suivant :

*On donne dans un plan quatre points fixes,  $m_1, m_2, m_3, m_4$ . Par ces points on mène quatre droites variables  $M_1, M_2, M_3, M_4$ . Soient  $D$  et  $\Delta$  les deux droites qui les rencontrent et  $d$  et  $\delta$  leurs traces sur le plan. Soient aussi  $p_1, p_2, p_3, p_4$  les points où  $D$  rencontre les droites  $M_1, M_2, M_3, M_4$ . Si la ponctuelle  $(dp_1p_2p_3p_4)$  est homographique à une ponctuelle fixe, la droite  $d\delta$  passe par un point fixe.*

Soit  $H_1$  l'hyperboloïde déterminé par les trois droites

Fig. 1.



$M_1, M_3, M_4$ . Sa trace sur le plan est une conique  $C_1$  (fig. 1) qui passe par les cinq points  $m_1, m_3, m_4, d, \delta$ .

On sait que les génératrices d'un même système d'un hyperboloïde déterminent des divisions homographiques sur une génératrice de l'autre système et sur une conique quelconque de la surface. Il en résulte que le rapport anharmonique des quatre points  $m_1, m_3, m_4, d$  sur la conique  $C_1$  est égal au rapport anharmonique des quatre points  $p_1, p_3, p_4, d$  sur la droite  $D$ . Ce rapport anharmonique a donc une valeur constante.

De même l'hyperboloïde  $H_2$  déterminé par les trois droites  $M_2, M_3, M_4$  a pour trace sur le plan une conique  $C_2$ , qui passe par les cinq points  $m_2, m_3, m_4, d, \delta$ , et le rapport anharmonique des quatre points  $m_2, m_3, m_4, d$  sur  $C_2$ , égal au rapport anharmonique des quatre points  $p_2, p_3, p_4, d$  sur la droite  $D$ , a une valeur constante.

Les deux faisceaux  $\delta(m_1, m_3, m_4, d)$  et  $\delta(m_2, m_3, m_4, d)$  ont des rapports anharmoniques constants. Il en est donc de même du faisceau  $\delta(m_1, m_2, m_3, m_4)$  et le point  $\delta$  décrit par conséquent une conique  $C$  qui passe par les quatre points  $m_1, m_2, m_3, m_4$ . Le second point  $\alpha$  où la droite  $d\delta$  rencontre  $C$  est fixe, puisque le rapport anharmonique des quatre points  $m_1, m_3, m_4, \alpha$ , égal à celui du faisceau  $\delta(m_1, m_3, m_4, d)$ , a une valeur constante.

Il est donc bien démontré que la droite  $d\delta$  passe par un point fixe.