

R. ALEZAIS

**Sur la transformation de l'équation du
troisième degré en elle-même**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 9
(1909), p. 441-451

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9_441_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1909, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[A3h]

**SUR LA TRANSFORMATION DE L'ÉQUATION
DU TROISIÈME DEGRÉ EN ELLE-MÊME ;**

PAR M. R. ALEZAIS.

Je me propose de résoudre ce problème tel qu'il est
proposé dans les *Leçons d'Algèbre* de Briot (17^e édi-

tion, n° 152, p. 687) et sans recourir à l'Algèbre supérieure.

Étant donnée l'équation

$$(1) \quad x^3 + px + q = 0,$$

trouver les substitutions rationnelles qui reproduisent cette équation. (Toute fonction rationnelle d'une racine x de l'équation peut se ramener à la forme

$$(2) \quad y = \lambda x^2 + \mu x + \nu;$$

il faut déterminer λ , μ , ν de façon que l'équation en y soit identique à l'équation en x .)

Si une substitution transforme une équation en elle-même, c'est qu'elle ne fait que permuter ses racines. Cette remarque permet de trouver les substitutions (2) quand on connaît les racines de l'équation (1).

Si l'on se propose de trouver les substitutions en fonction des coefficients de l'équation, elle fournit encore les renseignements suivants : Il y a six permutations des trois racines a , b , c de l'équation (1); les coefficients λ , μ , ν des substitutions (2) seront donc donnés par des équations du sixième degré; mais parmi ces six permutations se trouve la permutation identique qui correspond à $\lambda = \nu = 0$, $\mu = 1$; on sera donc ramené à des équations du cinquième degré. Enfin, le groupe des permutations de trois quantités admettant pour sous-groupe le groupe $(1, S, S^2)$ où $S = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$ et ce sous-groupe n'ayant à l'intérieur du groupe qu'un seul conjugué, on peut conjecturer que les coefficients des substitutions S et S^2 dépendent seulement d'équations du second degré et nous le vérifierons plus bas; en conséquence, les premiers membres des équations du cinquième degré se décomposeront

en produits de facteurs rationnels du second et du troisième degré.

Cherchons d'abord les équations du cinquième degré.

Il s'agit d'éliminer x entre les équations

$$x^3 + px + q = 0, \quad \lambda x^2 + \mu x - (y - \nu) = 0,$$

ou, ce qui revient au même, entre

$$\lambda x^2 + \mu x - (y - \nu) = 0, \quad \mu x^2 + \lambda(y - \nu + p\lambda)x - q\lambda = 0.$$

On trouve

$$[\mu^2 + \lambda(y - \nu + p\lambda)] [q\lambda\mu + (y - \nu)(y - \nu + p\lambda)] \\ - [q\lambda^2 - (y - \nu)\mu]^2 = 0$$

ou

$$(y - \nu)^3 + 2p\lambda(y - \nu)^2 \\ + (p\mu^2 + 3q\lambda\mu + p^2\lambda^2)(y - \nu) + q\mu^3 + pq\lambda^2\mu - q^2\lambda^3 = 0.$$

Pour que cette équation soit identique à l'équation

$$y^3 + py + q = 0,$$

que l'on peut écrire

$$(y - \nu)^3 + 3\nu(y - \nu)^2 + (3\nu^2 + p)(y - \nu) + \nu^3 + p\nu + q = 0,$$

il faut que l'on ait

$$(3) \quad \begin{cases} 2p\lambda = 3\nu, \\ p\mu^2 + 3q\lambda\mu + p^2\lambda^2 = 3\nu^2 + p, \\ q\mu^3 + pq\lambda^2\mu - q^2\lambda^3 = \nu^3 + p\nu + q. \end{cases}$$

On vérifie que ce système admet pour solution

$$\lambda = \nu = 0, \quad \mu = 1.$$

Éliminons d'abord λ et μ ; nous aurons

$$4p^2\mu^2 + 18q\nu\mu - 3p\nu^2 - 4p^2 = 0, \\ 8p^3q\mu^3 + 18p^2q\nu^2\mu - (8p^3 + 27q^2)\nu^3 - 8p^4\nu - 8p^3q = 0.$$

On peut remplacer cette dernière équation par

$$36pq^2\nu\mu^2 - 8p^2q(3\nu^2 + p)\mu + (8p^3 + 27q^2)\nu^3 + 8p^4\nu + 8p^3q = 0.$$

Posons

$$\Delta = 4p^3 + 27q^2;$$

le résultant pourra s'écrire

$$q^2(3\Delta\nu^2 + 4p^4)(9\Delta\nu^4 + 12p^4\nu^2 + 72p^3q\nu - 16p^5) + p^3(2\Delta\nu^3 + 4p(2p^3 + 9q^2)\nu + 8p^3q)^2 = 0,$$

ou

$$\Delta^3\nu^6 + 8p^4\Delta^2\nu^4 + 8p^3q\Delta^2\nu^3 + 16p^8\Delta\nu^2 + 32p^7q\Delta\nu = 0.$$

D'où l'équation du cinquième degré en ν

$$\chi(\nu) = \Delta^2\nu^5 + 8p^4\Delta\nu^3 + 8p^3q\Delta\nu^2 + 16p^8\nu + 32p^7q = 0.$$

En éliminant ν entre cette équation et la première équation (3), on obtient l'équation en λ

$$\varphi(\lambda) = \Delta^2\lambda^5 + 18p^2\Delta\lambda^3 + 27q\Delta\lambda^2 + 81p^4\lambda + 243p^2q = 0.$$

Enfin, l'équation en μ résulte de l'élimination de ν entre les équations

$$3p\nu^2 - 18q\mu\nu - 4p^2(\mu^2 - 1) = 0, \\ (4p^3 + \Delta)\nu^3 - 18p^2q\mu\nu^2 + 8p^4\nu - 8p^3q(\mu^3 - 1) = 0.$$

On peut remplacer cette dernière par

$$9q(p^3 + \Delta)\mu\nu^2 + 2p^2[(4p^3 + \Delta)\mu^2 + 2p^3 - \Delta]\nu - 12p^4q(\mu^3 - 1) = 0.$$

Le résultant est

$$\Delta^2\mu^6 - 6p^3\Delta\mu^4 - 27q^2\Delta\mu^3 + 9p^6\mu^2 + 81p^3q^2\mu - p^3(\Delta - 3p^3) = 0;$$

et en divisant le premier membre par $\mu - 1$, on a

$$\psi(\mu) = \Delta^2\mu^5 + \Delta^2\mu^4 + \Delta(\Delta - 6p^3)\mu^3 - 2p^3\Delta\mu^2 + p^3(9p^3 - 2\Delta)\mu + p^3(\Delta - 3p^3) = 0.$$

Nous allons voir maintenant que chacun des trois polynomes $\varphi(\lambda)$, $\psi(\mu)$, $\chi(\nu)$ admet un diviseur rationnel du second degré. Pour cela, cherchons directement les substitutions

$$y = \lambda_1 x^2 + \mu_1 x + \nu_1, \quad y = \lambda_2 x^2 + \mu_2 x + \nu_2$$

qui font subir aux racines a , b , c une permutation tournante. Il faut que l'on ait

$$\begin{aligned} \lambda_1 a^2 + \mu_1 a + \nu_1 &= b, & \lambda_2 a^2 + \mu_2 a + \nu_2 &= c, \\ \lambda_1 b^2 + \mu_1 b + \nu_1 &= c, & \lambda_2 b^2 + \mu_2 b + \nu_2 &= a, \\ \lambda_1 c^2 + \mu_1 c + \nu_1 &= a, & \lambda_2 c^2 + \mu_2 c + \nu_2 &= b. \end{aligned}$$

Posons

$$\delta = \begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(a-c) = \sqrt{-\Delta};$$

il en résultera

$$\begin{aligned} \partial\lambda_1 &= a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca), \\ \partial\mu_1 &= -(a^3 + b^3 + c^3) + a^2c + b^2a + c^2b, \\ \partial\nu_1 &= a^3b + b^3c + c^3a - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2), \\ \partial\lambda_2 &= -(a^2 + b^2 + c^2) + ab + bc + ca, \\ \partial\mu_2 &= a^3 + b^3 + c^3 - (a^2b + b^2c + c^2a), \\ \partial\nu_2 &= a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - (a^3c + b^3a + c^3b). \end{aligned}$$

On voit que les quantités λ_1 , μ_1 , ν_1 , λ_2 , μ_2 , ν_2 sont ou bien invariantes ou bien susceptibles de deux déterminations seulement, quand on effectue sur a , b , c toutes les permutations; on peut donc les calculer en fonction de p et de q par des équations du premier ou du second degré.

Des relations

$$a + b + c = 0, \quad ab + bc + ca = p, \quad abc = -q.$$

on tire

$$0 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2p,$$

d'où

$$a^2 + b^2 + c^2 = -2p.$$

Il en résulte

$$\delta\lambda_1 = -3p, \quad \delta\lambda_2 = 3p;$$

et, en vertu de la première relation (3),

$$\delta\nu_1 = -2p^2, \quad \delta\nu_2 = 2p^2.$$

On a ensuite

$$\begin{aligned} \delta(\mu_1 + \mu_2) &= a^2c + b^2a + c^2b - a^2b - b^2c - c^2a \\ &= (c - b)(a - b)(a - c) = -\delta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\delta^2\mu_1\mu_2 &= [a^3 + b^3 + c^3 - (a^2c + b^2a + c^2b)] \\ &\quad \times [a^3 + b^3 + c^3 - (a^2b + b^2c + c^2a)] \\ &= (a^3 + b^3 + c^3)^2 + (a^2c + b^2a + c^2b) \\ &\quad \times (a^2b + b^2c + c^2a) - (a^3 + b^3 + c^3)M, \end{aligned}$$

avec

$$M = a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$$

et

$$\begin{aligned} &(a^2c + b^2a + c^2b)(a^2b + b^2c + c^2a) \\ &= a^3c^3 + b^3a^3 + c^3b^3 + abc(a^3 + b^3 + c^3) + 3a^2b^2c^2. \end{aligned}$$

Or, on a

$$0 = (a + b + c)(ab + bc + ca) = M + 3abc,$$

$$0 = (a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3M + 6abc,$$

$$p^3 = (ab + bc + ca)^3 = a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 + 3abcM + 6a^2b^2c^2.$$

On en déduit

$$M = 3q,$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = -3q,$$

$$a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = p^3 + 3q^2,$$

$$(a^2c + b^2a + c^2b)(a^2b + b^2c + c^2a) = p^3 + 9q^2,$$

et l'on a

$$\delta^2 \mu_1 \mu_2 = -(p^3 + 27q^2).$$

$\delta\mu_1$ et $\delta\mu_2$ sont donc racines de l'équation

$$X^2 + \sqrt{-\Delta}X - (\Delta - 3p^3) = 0,$$

d'où l'on tire

$$X = \frac{1}{2}(-\sqrt{-\Delta} \pm 9q).$$

On peut toujours supposer la détermination de $\sqrt{-\Delta}$ positive; je dis que l'on doit alors écrire

$$\delta\mu_1 = \frac{1}{2}(9q - \sqrt{-\Delta}), \quad \delta\mu_2 = -\frac{1}{2}(9q + \sqrt{-\Delta}).$$

En effet, avec $4p^3 + 27q^2 < 0$, cas des trois racines réelles, si l'on suppose $a > b > 0 > c$, d'où $q > 0$, et que l'on élimine c , on trouve que $\delta\mu_2$ est toujours négatif; si l'on suppose $a > 0 > b > c$, d'où $q < 0$, et que l'on élimine a , on trouve que $\delta\mu_1$ est toujours négatif.

Avec $4p^3 + 27q^2 > 0$, si l'on pose

$$a = 2\alpha, \quad b = -\alpha + \beta i, \quad c = -\alpha - \beta i,$$

on trouve que la partie réelle de $\delta\mu_2$ a le signe de α et la partie réelle de $\delta\mu_1$ a le signe contraire; or α et $q = -2\alpha(\alpha^2 + \beta^2)$ ont des signes contraires.

On a, en définitive, les deux substitutions

$$(4) \quad \begin{cases} y = \frac{-6px^2 + (9q - \sqrt{-\Delta})x - 4p^2}{2\sqrt{-\Delta}}, \\ y = \frac{6px^2 - (9q + \sqrt{-\Delta})x + 4p^2}{2\sqrt{-\Delta}}. \end{cases}$$

Elles sont réelles quand elles permutent trois quan-

tités réelles, c'est-à-dire avec $\Delta < 0$; elles sont imaginaires avec $\Delta > 0$.

En tenant compte de l'hypothèse $x^3 + px + q = 0$, on vérifie facilement que chacune est à la fois le carré et l'inverse de l'autre.

Exemples. — 1° Soit $x^3 - 3x + 1 = 0$. On a $p = -3$, $q = 1$, $\sqrt{-\Delta} = 9$. Les deux substitutions sont

$$y = x^2 - 2, \quad y = -x^2 - x + 2.$$

2° Soit $2x^3 - x - 1 = 0$. On a $p = -\frac{1}{2}$, $q = -\frac{1}{2}$, $\sqrt{-\Delta} = \frac{5i}{2}$. Les deux substitutions sont

$$y = \frac{-(6x^2 - 9x - 2)i - 5x}{10}, \quad y = \frac{(6x^2 - 9x - 2)i - 5x}{10}.$$

Les équations qui ont pour racines les coefficients des substitutions (4) sont

$$(5) \quad \Delta\lambda^2 + 9p^2 = 0, \quad \Delta(\mu^2 + \mu + 1) - 3p^3 = 0, \quad \Delta\nu^2 + 4p^4 = 0.$$

Leurs premiers membres sont les diviseurs des polynomes $\varphi(\lambda)$, $\psi(\mu)$, $\chi(\nu)$, et l'on trouve

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= (\Delta\lambda^2 + 9p^2)(\Delta\lambda^3 + 9p^2\lambda + 27q), \\ \psi(\mu) &= (\Delta\mu^2 + \Delta\mu + \Delta - 3p^3)(\Delta\mu^3 - 3p^3\mu + p^3), \\ \chi(\nu) &= (\Delta\nu^2 + 4p^4)(\Delta\nu^3 + 4p^4\nu + 8p^5q). \end{aligned}$$

Les équations qui fournissent les coefficients des trois autres substitutions sont donc

$$(6) \quad \begin{cases} \Delta\lambda^3 + 9p^2\lambda + 27q = 0, \\ \Delta\mu^3 - 3p^3\mu + p^3 = 0, \\ \Delta\nu^3 + 4p^4\nu + 8p^5q = 0. \end{cases}$$

On aurait pu les obtenir par le même procédé que les équations (5), mais le calcul eût été plus long.

Les équations (6) ont pour discriminants

$$\frac{3^6(2\rho^3 + 27q^2)^2}{\Delta^3}, \quad \frac{3^6\rho^6q^2}{\Delta^3}, \quad \frac{2^6\rho^6(2\rho^2 + 27q^2)^2}{\Delta^3}.$$

Ces quantités ont même signe que Δ . Il en résulte d'abord que, dans le cas où les trois racines sont réelles, toutes les substitutions qui transforment l'équation en elle-même sont réelles.

Avec $\Delta > 0$, je dis qu'il existe toujours une substitution réelle; en d'autres termes, que les racines réelles des trois équations (6) se correspondent. Cela résulte pour λ et ν de la première équation (3), mais il est moins facile de l'établir directement pour μ . On peut montrer l'existence de la substitution réelle de la manière suivante.

Posons de nouveau

$$a = 2\alpha, \quad b = -\alpha + \beta i, \quad c = -\alpha - \beta i,$$

d'où

$$\delta = (a - b)(b - c)(a - c) = 2\beta i(9\alpha^2 + \beta^2),$$

et considérons la substitution qui échange les deux racines imaginaires. Ses coefficients λ_3, μ_3, ν_3 vérifient les relations

$$\lambda_3 a^2 + \mu_3 a + \nu_3 = a,$$

$$\lambda_3 b^2 + \mu_3 b + \nu_3 = c,$$

$$\lambda_3 c^2 + \mu_3 c + \nu_3 = b,$$

et l'on a

$$\delta\lambda_3 = (b - c)[2\alpha - (b + c)] = 4\alpha\beta i,$$

$$\begin{aligned} \delta\mu_3 &= (b - c)[b^2 + c^2 - a^2 - a(b + c) + bc] \\ &= -2\beta(3\alpha^2 - \beta^2)i, \end{aligned}$$

$$\delta\nu_3 = \alpha(b - c)[\alpha(b + c) - (b^2 + c^2)] = -8\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)i.$$

D'où, pour λ_3, μ_3, ν_3 , les valeurs réelles

$$\lambda_3 = \frac{2\alpha}{9\alpha^2 + \beta^2}, \quad \mu_3 = -\frac{3\alpha^2 - \beta^2}{2(9\alpha^2 + \beta^2)}, \quad \nu_3 = -\frac{4\alpha(\alpha^2 + \beta^2)}{9\alpha^2 + \beta^2}.$$

Soit T la substitution correspondante ; les deux autres TS et TS^2 sont imaginaires en même temps que S et S^2 .

En appliquant la formule de Cardan aux équations (6), on trouve pour la substitution réelle T

$$y = \frac{\sqrt[3]{2p^3 + 27q^2 - 3\sqrt{3}q\sqrt{\Delta}} - \sqrt[3]{2p^3 + 27q^2 + 3\sqrt{3}q\sqrt{\Delta}}}{\sqrt[3]{2}\sqrt{\Delta}} \\ \times \left(\sqrt{3}x^2 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{\sqrt[3]{3\sqrt{3}q - \sqrt{\Delta}} - \sqrt[3]{3\sqrt{3}q + \sqrt{\Delta}}}{\sqrt[3]{2}\sqrt{\Delta}} px.$$

Mais

$$2p^3 + 27q^2 + 3\sqrt{3}q\sqrt{\Delta} = \frac{1}{2} (3\sqrt{3}q + \sqrt{\Delta})^2$$

et l'on peut écrire

$$y = - \frac{\sqrt[3]{3\sqrt{3}q + \sqrt{\Delta}} - \sqrt[3]{3\sqrt{3}q - \sqrt{\Delta}}}{\sqrt[3]{2}\sqrt{\Delta}} \\ \times \left[\frac{\sqrt[3]{3\sqrt{3}q + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{3\sqrt{3}q - \sqrt{\Delta}}}{\sqrt[3]{2}} \left(\sqrt{3}x^2 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + px \right].$$

Ainsi l'équation

$$2x^3 - x - 1 = 0$$

admet la substitution

$$y = \frac{\sqrt[3]{3\sqrt{3} + 5} - \sqrt[3]{3\sqrt{3} - 5}}{5} \\ \times \left[\frac{\sqrt[3]{3\sqrt{3} + 5} + \sqrt[3]{3\sqrt{3} - 5}}{\sqrt[3]{2}} \left(\sqrt{3}x^2 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \frac{x}{\sqrt[3]{4}} \right].$$

Quand p ou q est nul, les résultats se simplifient.

Dans le cas de l'équation

$$x^3 + px = 0,$$

on a d'abord les deux substitutions

$$y = \frac{-3x^2 - \sqrt{-p}x - 2p}{2\sqrt{-p}}, \quad y = \frac{3x^2 - \sqrt{-p}x + 2p}{2\sqrt{-p}}.$$

On peut facilement déduire les autres des équations (6) qui deviennent ici

$$\lambda(4p\lambda^2 + 9) = 0, \quad (\mu + 1)(2\mu - 1)^2 = 0, \quad \nu(\nu^2 + p) = 0,$$

mais il est encore plus simple de remarquer que la substitution, qui est réelle quel que soit p , est manifestement ici

$$y = -x,$$

et que, par suite, les deux dernières sont

$$y = \frac{-3x^2 + \sqrt{-p}x - 2p}{2\sqrt{-p}}, \quad y = \frac{3x^2 + \sqrt{-p}x + 2p}{2\sqrt{-p}}.$$

Dans le cas de l'équation

$$x^3 + q = 0,$$

on trouve immédiatement les cinq substitutions

$$y = \varepsilon x, \quad y = \varepsilon^2 x, \quad y = -\frac{x^2}{\sqrt[3]{q}}, \quad y = -\frac{\varepsilon x^2}{\sqrt[3]{q}}, \quad y = -\frac{\varepsilon^2 x^2}{\sqrt[3]{q}},$$

où ε est une racine cubique imaginaire de l'unité.