

Certificat de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 9
(1909), p. 380-383

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9_380_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1909, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

CERTIFICAT DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Grenoble

COMPOSITION. — *Lignes de courbure d'une surface S. Méthode de Gauss.*

Application à la surface définie par

$$\begin{aligned}x &= \sin u \sin v, & y &= \sin u \cos v, \\z &= \cos u + \log \operatorname{tang} \frac{u}{2} + f(v).\end{aligned}$$

On montrera que l'un des systèmes, (C_1) , de lignes de courbure est composé de lignes planes, et le second, (C_2) , de lignes sphériques. On déterminera la fonction $f(v)$ par la condition que les plans des courbes (C_1) rencontrent tous la surface S sous un même angle. Quelle est alors la relation entre u et v qui détermine les courbes (C_2) ?

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer l'équation*

$$(y-z)(3yz-x^2)dx + 2x(x^2+z^2)dy - 2x(x^2+y^2)dz = 0.$$

(Novembre 1908.)

Lille.

I. QUESTION DE COURS. — *Méthodes d'approximation dans le calcul des intégrales définies. Méthode de Cotes. Méthode de Gauss.*

II. PROBLÈME. — *On donne l'équation linéaire*

$$(1) \quad f^2 y'' - X y' + y = 0,$$

f désignant une fonction donnée de x , X une fonction à déterminer de cette même variable.

1° Effectuer le changement de variable $t = \varphi(x)$, de telle sorte que l'équation se réduise à la forme

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y = 0,$$

K étant une constante.

Que doit être la fonction X pour que cette transformation soit possible? Déterminer la fonction $\varphi(x)$ et intégrer l'équation (1).

2° Déterminer X de telle façon qu'en multipliant par $2y'$ le premier membre de l'équation (1) on obtienne une dérivée exacte. Dédurre de là l'intégrale générale de l'équation (1).

(Novembre 1908.)

Marseille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° Établir entre deux constantes α et k une relation telle que l'équation

$$(1) \quad y = x \operatorname{tang} \alpha + kx^2$$

soit l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$(2) \quad x^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 4x(y-h) \frac{dy}{dx} + x^2 - 4hy + 4y^2 = 0.$$

2° Vérifier que l'enveloppe des paraboles représentées par l'équation (1) quand α varie est l'intégrale singulière de l'équation différentielle.

3° On fait ensuite

$$x = t \cos \alpha,$$

de sorte que y , tiré de l'équation (1), s'exprime aussi en t .

On a ainsi une représentation paramétrique de la parabole (1) pour une valeur donnée de α . Mais, si l'on considère α comme une fonction de t , soit

$$f(\alpha, t) = 0,$$

les mêmes équations pourront représenter une courbe quelconque S . Déterminer $f(\alpha, t)$ de sorte que la courbe S soit une trajectoire orthogonale des paraboles.

SOLUTION.

1°

$$k = \frac{-1}{4h \cos^2 \alpha}.$$

2°

$$dt \left(1 + \frac{t^2}{4h^2} \right) - d \left(\frac{t^2}{2h} \sin \alpha \right) = 0.$$

Équation immédiatement intégrable.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Étudier la variation du module de la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 5}$$

sur le cercle de rayon 2 centré à l'origine.

Déduire de là des limites supérieures des modules de la fonction et de ses dérivées successives au point

$$z_1 = \frac{1}{2} e^{-i \frac{\pi}{4}}.$$

Ces limites croissent indéfiniment avec l'indice n de la dérivée.

(Novembre 1908.)

Montpellier.

COMPOSITION ÉCRITE. — On a la surface

$$z = y \operatorname{tang} x.$$

Déterminer les rayons de courbure et les centres de courbure principaux, en un point quelconque.

Déterminer les lignes asymptotiques.

Chercher le lieu des centres de courbure principaux en M, lorsque ce point décrit une ligne asymptotique de l'un ou l'autre système.

Pour chacune des deux courbes obtenues comme lieu des centres de courbure, calculer la longueur de l'arc de courbe compris entre deux points de coordonnées connues.

ÉPREUVE PRATIQUE. — On donne la courbe

$$x(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2).$$

Montrer qu'elle comprend une boucle fermée et des branches infinies. Calculer l'aire comprise dans la boucle fermée.

(Novembre 1908.)

Rennes.

Étant donnés deux axes rectangulaires Ox , Oy , trouver une ligne (L) telle que, A et B désignant les points où une tangente variable à la ligne (L) rencontre Ox et Oy , on ait la relation

$$OA + OB = a,$$

où a est une constante donnée.

1° Former l'équation différentielle des lignes (L).

2° Calculer, pour la courbe qui correspond à l'intégrale singulière de cette équation, la longueur s de l'arc compté à partir du point de la courbe situé sur la droite $y = x$.

(On prendra pour variable le coefficient angulaire p de la tangente, puis l'angle φ de cette tangente avec la droite $y = x$.)

3° Former l'équation différentielle des trajectoires orthogonales des lignes (L). Intégrer cette équation. Interpréter géométriquement les résultats.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Intégrer l'équation différentielle

$$x^4 \frac{d^4 y}{dx^4} + 5x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} + x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} - 2y = V,$$

où

$$V = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x^2} [6 - 10 \log x + 9 (\log x)^2].$$

(Novembre 1908.)