

Certificat de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 9
(1909), p. 327-336

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9_327_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1909, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

CERTIFICAT DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Bordeaux.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Première Question. — *Intégration de l'équation*

$$y = xf(y') + \varphi(y'),$$

où

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

et où $f(y')$ et $\varphi(y')$ sont deux fonctions données de y' .

APPLICATION. — Une courbe plane C est rapportée à deux axes rectangulaires Ox, Oy. Par un point M variable sur cette courbe on mène une droite MD de coefficient angulaire égal et de signe contraire à celui de la tangente en M à la courbe. Déterminer la courbe C par la condition que MD restetangente à une parabole donnée dont l'équation est

$$y^2 = 2px.$$

On calculera le rayon de courbure en un point de la courbe C.

Deuxième Question. — Énoncer et démontrer le théorème des résidus relatif à la valeur de l'intégrale $\int f(z) dz$ prise le long du périmètre limitant une aire pour laquelle $f(z)$ est analytique, uniforme et à points singuliers isolés.

On montrera comment on peut, comme application de ce théorème, déterminer la valeur de l'intégrale de variable réelle

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+5)}.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer l'intégrale définie

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{1}{\cos^2 \theta}} d\theta.$$

(Juillet 1908.)

Caen.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° On considère le système

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = A, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = B, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = C,$$

A, B, C étant des fonctions connues de x, y, z , et l'on

demande quelles sont les conditions d'intégrabilité du système. En les supposant satisfaites, fixer l'économie des conditions initiales qui suffisent pour déterminer une intégrale. Calculer cette intégrale en faisant

$$A = y^2 + z^2, \quad B = z^2 + x^2, \quad C = x^2 + y^2,$$

et en choisissant comme on voudra les fonctions arbitraires sans toutefois les réduire à de simples constantes.

2^o On considère un plan variable P, dont l'équation, en coordonnées rectangulaires, est

$$18u^2x + y - 6uz - 3u^4 = 0,$$

u désignant un paramètre arbitraire. Montrer que l'arête de rebroussement de la développable enveloppe du plan P est une hélice. Trouver les trajectoires orthogonales des génératrices de cette développable et reconnaître qu'elles sont situées dans des plans normaux aux génératrices du cylindre dont l'hélice précédente est une géodésique.

(Un point de l'arête de rebroussement a pour coordonnées

$$x = u^2, \quad y = 9u^4, \quad z = 4u^3;$$

cette courbe coupe sous un angle de 45° un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la bissectrice de XOY.)

ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer l'intégrale

$$\int \frac{(x-1) dx}{(x+1)^3 (x^2-x+2)^2}.$$

(Juin 1908.)

Grenoble.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Les courbes planes constituant une famille de courbes parallèles ont, dans leur plan, une développée commune.

Application aux courbes parallèles à la courbe

$$x = \psi(u) \cos u - \psi'(u) \sin u, \quad y = \psi(u) \sin u + \psi'(u) \cos u.$$

II. Lignes de courbure et rayons principaux de la sur-

face engendrée par la courbe variable

$$\begin{aligned}x &= \psi(u) \cos u - \psi'(u) \sin u + \varphi(z) \cos u, \\y &= \psi(u) \sin u + \psi'(u) \cos u + \varphi(z) \sin u,\end{aligned}$$

quand le paramètre u varie.

Décrire le mode de génération de la surface par chacun des systèmes de lignes de courbure, et montrer que la surface est une surface moulure.

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. Que devient l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

quand on change les variables x et y en deux autres z et θ liées aux premières par les équations

$$x = e^z \cos \theta, \quad y = e^z \sin \theta?$$

Vérifier que, l'équation proposée étant vérifiée par

$$u = \varphi(x + iy) + \psi(x - iy),$$

où φ et ψ sont deux fonctions arbitraires, l'équation transformée sera de même satisfaite par

$$u = \varphi_1(z + i\theta) + \psi_1(z - i\theta),$$

φ_1 et ψ_1 étant aussi deux fonctions arbitraires.

II. Étude des courbes intégrales de l'équation

$$(ax + by + c) dx + (ay - bx + c') dy = 0.$$

(Juillet 1908.)

Lille.

QUESTION DE COURS. — Déterminants fonctionnels :

1° Définition;

2° Calcul du déterminant quand les fonctions données sont composées ou implicites ;

3° Condition nécessaire et suffisante pour que n fonctions

de n variables indépendantes soient liées par une ou plusieurs relations ne contenant pas les variables.

PROBLÈME. — Former toutes les équations de Riccati

$$y' + ay^2 + by + c = 0,$$

admettant deux solutions y_1, y_2 , telles que leur somme soit égale à leur produit. Trouver ces deux solutions particulières.

Ces équations dépendent de deux fonctions arbitraires u et v de x .

Montrer qu'on peut mettre les coefficients a, b, c sous la forme

$$a = \frac{1}{4}(\nu \sin^2 u + 2 \operatorname{tang} u),$$

$$b = -(\nu + \operatorname{tang} u),$$

$$c = \nu.$$

En mettant la fonction ν sous une forme convenable, obtenir sans signe de quadrature la solution générale de l'équation de Riccati.

(Juillet 1908.)

Marseille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — On suppose que l'ordonnée z d'un point quelconque d'une surface S ait pour projection sur la normale une longueur constante a .

1° Déterminer l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfait cette surface et vérifier qu'on peut considérer S comme l'enveloppe d'une famille de surfaces représentées par l'équation

$$x \cos u + y \sin u + f(u) = a \log \frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a}.$$

2° Déterminer les lignes de courbure en prenant pour variables z et u ;

3° Déterminer la fonction $f(u)$ de sorte que la surface contienne un cercle dont les équations

$$z = a, \quad x^2 + y^2 - 2\lambda x = 0$$

renferment une constante donnée λ .

4° Lorsque $f(u)$ a été ainsi déterminée, ramener à une quadrature la recherche des lignes asymptotiques de la surface.

SOLUTION.

L'équation aux dérivées partielles est

$$\frac{z}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = a \quad \text{ou} \quad p^2 + q^2 = \frac{z^2 - a^2}{a^2}.$$

Si l'on pose

$$t = a \log \frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a},$$

on est ramené à

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2 = 1,$$

dont l'intégrale générale est définie par l'équation

$$t = x \cos u + y \sin u + f(u)$$

et sa dérivée en u .

2° On trouve $du dz = 0$, ce qui donne les lignes de pente et les lignes de niveau.

3° On a

$$(f + \lambda \cos u)^2 + (f' - \lambda \sin u)^2 = \lambda^2,$$

d'où

$$f = \lambda [\cos u + \cos(u - u_0)].$$

4° La condition $f + f'' = 0$ conduit à

$$t du^2 + t'' dz^2 = 0.$$

Remarque. — Si l'on choisit les surfaces satisfaisant à $qx - py = 0$, on a des surfaces de révolution dont la méridienne est une chaînette ayant son axe de symétrie parallèle à Ox . En faisant subir à cette surface une translation suivant une direction parallèle au plan des xy , on a une intégrale complète dépendant des coordonnées x_0, y_0 du pied de l'axe de la surface de révolution.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Les rayons de deux cercles de*

centre commun $z_0 = \frac{i}{2}$ étant pris entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$, déterminer le développement en série de Laurent de la fonction

$$u = \frac{1}{z^2 - 1},$$

dans la couronne formée par les deux cercles.

SOLUTION.

Si l'on écrit

$$u = \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{\left(z - \frac{i}{2}\right) - \frac{i}{2}} + \frac{1}{-\frac{3i}{2} - \left(z - \frac{i}{2}\right)} \right],$$

deux divisions, l'une ordonnée par rapport aux puissances positives de $z - \frac{i}{2}$, l'autre ordonnée par rapport aux puissances négatives, donnent immédiatement les deux parties de la série de Laurent sans qu'il soit nécessaire de former les intégrales définies qui servent de coefficients à ses termes.

(Juin 1908.)

Montpellier.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Une surface a pour équation

$$z = f(x) + \varphi(y).$$

Soient C, C' les centres de courbure principaux au point M, A le milieu de la droite CC'. Déterminer les fonctions f et φ de façon que la projection de MA sur OZ soit constante, pour tout point M de la surface.

Calculer les rayons de courbure principaux en un point M, pour les surfaces obtenues. Déterminer leurs lignes asymptotiques.

Si α , β sont les angles de la normale en M avec les axes OX, OY, D la projection de CC' sur OZ : montrer que, parmi les surfaces déjà obtenues, il en existe pour lesquelles $D \tan \alpha \tan \beta$ est aussi constant.

Appliquer les formules précédentes à ce cas particulier.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un parabolôide et un cylindre sont représentés par les équations*

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c^2,$$

a et b étant positifs, les axes rectangulaires.

Calculer l'aire de la portion de parabolôide intérieure au cylindre, et le volume intérieur au cylindre compris entre le parabolôide et le plan xOy .

On pourra effectuer le changement de variables

$$x = a\rho \cos \omega, \quad y = b\rho \sin \omega,$$

(Juillet 1908.)

Rennes.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1. *On donne le système d'équations différentielles*

$$\frac{dx}{dt} - y\sqrt{1-k^2} = \varphi(t),$$

$$\frac{dy}{dt} + x\sqrt{1-k^2} + kz = 0,$$

$$\frac{dz}{dt} - ky = 0,$$

où k désigne une constante positive plus petite que un et $\varphi(t)$ une fonction connue de t .

1° *Si $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ sont deux systèmes de fonctions de t correspondant à deux solutions des équations sans second membre, la somme $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ reste constante, et l'on a une nouvelle solution, en posant*

$$x_3 = y_1z_2 - z_1x_2, \quad y_3 = z_1x_2 - x_1z_2, \quad z_3 = x_1y_2 - y_1x_2.$$

2° *Trouver trois solutions $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$ des équations sans second membre, telles qu'on ait, pour $t = 0$,*

$$x_1 = \sqrt{1-k^2}, \quad x_2 = 0, \quad z_3 = -k,$$

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 1, \quad y_3 = 0,$$

$$z_1 = k, \quad z_2 = 0, \quad z_3 = \sqrt{1-k^2}.$$

3° Indiquer les quadratures à effectuer pour avoir la solution générale des équations avec second membre.

Achever le calcul en supposant

$$\varphi(t) = -a\sqrt{1-k^2} \sin(kt) \quad (a \text{ constant}).$$

II. On considère les courbes (C) dont la tangente en un point quelconque M (x, y, z) a pour paramètres directeurs $\alpha x, \beta y, \gamma z$; ces courbes sont solutions du système différentiel

$$(1) \quad \frac{dx}{\alpha x} = \frac{dy}{\beta y} = \frac{dz}{\gamma z};$$

α, β, γ sont des constantes et les axes rectangulaires.

1° Démontrer que les courbes (C) sont les trajectoires orthogonales d'une famille à un paramètre de surfaces du second degré

$$F(x, y, z) = \text{const.}$$

2° Les courbes (C) qui rencontrent une courbe directrice (D) engendrent une surface (S). Lorsque la directrice (D) est une droite, montrer que la surface (S) est réglée; déterminer les droites (D) pour lesquelles la surface est développable; caractériser ces droites et les arêtes de rebroussement.

3° Lorsque la directrice (D) est une ligne courbe, solution d'un système différentiel analogue à (1),

$$(2) \quad \frac{dx}{\alpha' x} = \frac{dy}{\beta' y} = \frac{dz}{\gamma' z},$$

La surface (S) admet une deuxième génération analogue à celle de définition. Trouver les lignes asymptotiques. Montrer que chacune des familles d'asymptotiques est formée de trajectoires orthogonales d'une famille de quadriques, et montrer que la surface (S) est orthogonale à une infinité de familles de quadriques.

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. Calculer le moment d'inertie, par rapport à Oz, du cylindre droit, de hauteur h , ayant pour base, dans le plan xOy , le cercle

$$x^2 + y^2 - ax = 0.$$

II. On considère une surface (S) définie par l'équation

$$\frac{x^2 + y^2}{x} = f(z),$$

puis le solide limité par cette surface et les plans $z = 0$, $z = c$. Indiquer quelles quadratures il suffira d'effectuer si l'on veut calculer pour ce solide :

Le volume ;

Les coordonnées du centre de gravité ;

Le moment d'inertie par rapport à Oz.

Achever les calculs en supposant

$$f(z) = \sqrt{c^2 - z^2}$$

et c constant.

Former l'équation aux dérivées partielles des surfaces (S).

Montrer que les plans tangents en tous les points d'une section $z = \text{const.}$ rencontrent l'axe des z au même point.

(Juin 1908.)