Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1907). Composition sur la mécanique

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 9 (1909), p. 268-281

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__268_0>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1907). COMPOSITION SUR LA MÉCANIQUE.

SOLUTION PAR UN CORRESPONDANT.

Un corps de révolution Σ *homogène pesant, analogue à une toupie, repose par une pointe* S *sur un plan horizontal fixe* H; *la pointe glisse sans frottement sur ce plan; le système n'est assujetti à aucune autre liaison et il n'est soumis qu'à l'action de la pesanteur.*

On désigne par G *le centre de gravité de* Σ *et par* l *la distance* SG; *on définit le mouvement du corps par la variation des angles d'Euler* θ, ψ, φ *qui sont respectivement l'angle de* SG *avec la verticale ascendante, l'angle de précession et l'angle de rotation propre; on désigne par* r, q, p *les composantes de la rotation instantanée suivant l'axe, l'horizontale perpendiculaire à l'axe et une perpendiculaire commune à ces deux droites, par* μ *et* μ' *les moments de rotation par rapport à l'axe et à la verticale du point* G.

1° *Écrire les équations du mouvement de* Σ. *En supposant qu'au début du mouvement la dérivée de* θ *par rapport au temps est nulle, à quelle condition doivent satisfaire les données initiales pour que* θ *conserve indéfiniment une valeur constante?*

2° APPLICATION NUMÉRIQUE. — *On suppose que le corps* Σ *a toute sa masse concentrée sur une circonférence homogène dont le plan est perpendiculaire à l'axe; le centre* G *sur l'axe et le rayon égal à* 10^{cm}; *la distance* SG *ou* l *est égale à* 20^{cm} *et l'inten-*

sité g de la pesanteur est prise égale à 980 *C. G. S. La position initiale de l'axe* SG *est inclinée sur la verticale de l'angle* $\frac{\pi}{6}$, *et le mouvement initial est le mouvement résultant de deux rotations, l'une autour d'un axe vertical passant par* G *avec une vitesse angulaire correspondant à n tours par seconde, l'autre autour de l'axe* SG *avec une vitesse angulaire correspondant à* 50 *tours par seconde. On demande de calculer la valeur numérique qu'il faut attribuer à n pour que θ conserve indéfiniment la même valeur qu'à l'instant initial.*

3° *Le corps Σ et les données initiales sont supposés quelconques, tels cependant que le point* G *se déplace suivant une verticale et que la pointe* S *repose constamment sur le plan* H. *A un certain moment on approche de Σ une droite rigide* D *qu'on maintient fixe, et cette droite* D *est choquée par le corps Σ à la manière des corps élastiques; on suppose qu'au moment du choc la droite* D *est perpendiculaire au plan vertical contenant* SG, *et l'on désigne par c sa cote au-dessus du plan* H; *on l'écarte après le choc de façon que le mouvement ultérieur de Σ ne soit pas gêné.*

Si M_1 *et* M_2 *sont les mouvements du corps Σ avant et après le choc, démontrer que les limites entre lesquelles varie θ sont plus étroites dans* M_2 *que dans* M_1. *Cette conclusion subsisterait-elle encore dans le cas où l'élasticité des corps choquants serait imparfaite?*

4° *On suppose que l'élasticité est parfaite, et l'on donne le mouvement* M_1; *peut-on choisir l'angle θ que fait, au moment du choc, l'axe* SG *avec la verticale pour que cet angle reste ensuite constant pendant le mouvement* M_2? *Quelles devront être* *les autres circonstances du choc? Indiquer, en particulier, suivant quelles lignes pourra s'exercer la percussion produite par le choc au point de contact de* D *et de* Σ, *et en déduire les positions qu'on peut attribuer à la droite* D.

5° *On considère dans ce qui suit le cas où le corps* Σ *comprend une tige infiniment mince dirigée suivant son axe et où le choc se fait en un point de cette ligne dans les conditions du* 4°; *montrer qu'il existe, en général, deux positions possibles* D', D'' *de la droite* D, *et déterminer ces positions. En supposant qu'on ait effectué, lorsque* D *occupe la position* D', *le calcul des percussions au moment du choc et des éléments du mouvement* M_2, *quelles modifications faudrait-il apporter aux résultats de ce calcul lorsqu'on fait occuper à la droite* D *l'autre position* D''?

6° *Comment doivent être choisies les circonstances du mouvement* M_1 *au moment du choc pour que l'une des positions* D' *ou* D'' *soit dans le plan* H? *Montrer que, si l'on place* D *dans l'autre position, le choc ne produit aucune percussion sur la pointe* S. *La distribution des masses de* Σ *peut-elle être telle que cette circonstance ne se produise pour aucun mouvement* M_1?

7° *Dans les conditions générales énoncées au* 5°, *discuter le nombre et la position de celles des droites* D' *ou* D'' *pour lesquelles le choc n'a pas pour effet de soulever la pointe* S; *examiner séparément le cas où, au moment du choc, l'axe du corps* Σ *dans le mouvement* M_1 *s'approche de la verticale, et le cas où il s'en éloigne.*

I. Désignons par $O\xi\eta\zeta$ un trièdre fixe dans l'espace, le sommet de ce trièdre étant dans le plan horizontal H, et l'arête $O\zeta$ étant dirigée suivant la verticale ascendante. Désignons de même par $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$ un deuxième trièdre parallèle au premier, l'arête $O_1\zeta_1$ passant constamment par le centre de gravité G, et le sommet O_1 étant la projection de ce centre sur le plan H; enfin désignons par $Gxyz$ un trièdre lié au corps, ayant pour sommet le point G, l'arête Gz ayant la même direction que l'axe de révolution SG.

D'après le théorème du mouvement du centre de gravité, le trièdre $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$ est au repos, ou est animé d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme; le mouvement du corps par rapport à ce trièdre est complètement défini par la variation, en fonction du temps, des angles d'Euler φ, θ, ψ, car la cote du point G est constamment égale à

$$\zeta = l\cos\theta,$$

et le mouvement de ce point G sur $O_1\zeta_1$ est déterminé par la variation de θ.

Avec les notations habituelles, et en désignant par μ et μ' les moments de rotation de Σ par rapport à Gz et à $O_1\xi_1$, le théorème du moment cinétique par rapport à l'une et à l'autre de ces droites donne les deux intégrales

$$Cr = Cr_0 = \mu,$$
$$A\psi'\sin^2\theta + \mu\cos\theta = \mu';$$

enfin le théorème des forces vives donne l'intégrale

$$M(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) + A(p^2 + q^2) + Cr^2 = -2Mg\zeta + h_0,$$

qu'on peut écrire sous la forme

$$M\zeta'^2 + A(\psi'^2\sin^2\theta + \theta'^2) = -2Mg\zeta + h. \tag{1}$$

Si l'on pose

$$\cos\theta = u, \qquad \zeta = lu,$$

et si l'on élimine ψ' entre la deuxième et la troisième des intégrales précédentes, on obtient pour déterminer u l'équation différentielle

$$(2)\quad \begin{cases} [A + Ml^2(1 - u^2)]u'^2 \\ \quad = (h - 2Mglu)(1 - u^2) - \frac{1}{A}(\mu' - \mu u)^2; \end{cases}$$

lorsque u est connu, ψ et φ sont déterminés par les équations

$$A(1 - u^2)\psi' = \mu' - \mu u,$$
$$\varphi' = r_0 - u\psi'.$$

La discussion des circonstances du mouvement suivant les données initiales se ramène à l'étude des racines du polynome qui forme le second membre de l'équation (2), polynome que nous désignerons par $f(u)$; cette étude est classique, et nous n'examinerons que le cas particulier où θ garde une valeur constante θ_0 pendant le mouvement, la valeur initiale de θ' étant nulle; nous appellerons u_0 la valeur de $\cos\theta_0$.

La constante h est alors fournie par l'équation

$$f(u_0) = 0;$$

lorsque h est remplacée par la valeur ainsi trouvée, l'équation $f(u) = 0$ admet la racine u_0; pour que θ reste constant, il faut et il suffit que u_0 soit racine double, ou que $f'(u_0)$ soit nul, c'est-à-dire qu'on ait

$$-u_0(h - 2Mglu_0) - Mgl(1 - u_0^2) + \frac{\mu}{A}(\mu' - \mu u_0) = 0.$$

Si nous remplaçons h par sa valeur, ce qui revient à éliminer $h - 2Mglu_0$ entre l'équation $f(u_0) = 0$ et la précédente, nous obtenons la relation suivante :

$$(3)\quad (\mu' - \mu u_0)(\mu - \mu' u_0) - MglA(1 - u_0^2)^2 = 0;$$

à la notation près, c'est la condition à laquelle doivent satisfaire les données θ_0, ψ'_0, φ'_0, qui, jointes à $\theta'_0 = 0$, donnent un mouvement dans lequel θ reste constant; ces conditions sont du reste suffisantes; ψ et φ varient alors proportionnellement au temps.

II. *Application numérique.* — La vitesse angulaire du corps autour de Gz est égale à φ', et sa vitesse angulaire autour de $G\zeta_1$ est égale à ψ'; la vitesse instantanée de rotation, résultante des deux précédentes, a pour projection sur Gz à chaque instant la quantité $r = \varphi' = \psi' u$; il en résulte que μ et μ' ont les valeurs

$$\mu = C(\varphi' + \psi' u), \qquad \mu' = \mu u + A\psi'(1 - u^2).$$

Si nous nous plaçons dans le cas où u, ψ' et φ' gardent des valeurs constantes égales aux valeurs initiales, l'équation (3) doit être satisfaite; en y remplaçant μ et μ' par leurs valeurs, cette équation se décompose en $(1 - u_0^2)^2 = 0$ et

$$\psi'_0 [C\varphi'_0 + (C - A)\psi'_0 u_0] - Mgl = 0;$$

c'est de cette dernière qu'on tirera ψ'_0 quand les autres quantités seront connues.

Dans le cas indiqué dans l'énoncé, on a

$$C = 10^2 M, \qquad A = \frac{1}{2} C = \frac{1}{2} 10^2 M,$$
$$u_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \varphi'_0 = 100\pi, \qquad \psi'_0 = 2n\pi,$$

et n est donné par l'équation

$$\pi^2 \sqrt{3} n^2 + 200\pi^2 n - 196 = 0;$$

ses deux racines sont

$$n_1 = 0{,}1013 \qquad \text{et} \qquad n_2 = -116{,}1520;$$

à la première correspond un mouvement de précession très lent dans le sens positif, à la seconde un mouvement dans le sens négatif avec une vitesse du même ordre de grandeur que celle de la rotation propre.

III. Par hypothèse, les deux trièdres $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$ et $O\xi\eta\zeta$ sont, avant le choc, constamment confondus; nous supposons qu'ils sont choisis de telle sorte qu'au moment du choc le plan $O\xi\zeta$ contienne l'axe Gz, ainsi que le point de contact de Σ avec la droite D; celle-ci est donc parallèle à $O\eta$.

Le choc va produire sur le corps Σ deux percussions; l'une P est appliquée au point de contact de Σ et de D; nous désignerons par Q ce point, par α et γ ses coordonnées dans le système $O\xi\eta\zeta$, et par X, Z les projections de la percussion sur $O\xi$ et $O\zeta$, sa projection sur $O\eta$ étant nulle; l'autre percussion P' est appliquée au point de contact S de Σ et du plan H; nous désignerons sa composante verticale par Z'_1, les deux autres composantes étant nulles. Nous affecterons de l'indice 1 les données relatives au mouvement immédiatement avant le choc, et de l'indice 2 les mêmes données immédiatement après le choc.

Les composantes ξ', η' de la vitesse du point G sont nulles par hypothèse avant le choc, mais elles ne le sont pas forcément après le choc; le théorème du mouvement du centre de gravité fournit les équations

$$M\xi'_2 = X, \qquad M\eta'_2 = 0, \qquad M(\zeta'_2 - \zeta'_1) = Z + Z';$$

si nous supposons que la pointe S reste toujours sur le plan horizontal H, la dernière de ces équations peut être remplacée par

$$-M l \sin\theta(\theta'_2 - \theta'_1) = Z + Z'.$$

Nous joindrons à ces trois relations : 1° celles qui résultent de la considération du moment cinétique par rapport à Gz et par rapport à $G\zeta_1$; elles montrent que les constantes μ et μ' gardent la même valeur après le choc, ou bien que r, ψ' et φ' ne changent pas au moment du choc; 2° celle qui résulte du théorème des forces vives, elle donne la relation

$$\begin{aligned} &M(\xi_2'^2 + \zeta_2'^2) + A(\psi_2'^2 \sin^2\theta_2 + \theta_2'^2) + C r_2^2 \\ &\leqq M\zeta_2'^2 + A(\psi_2'^2 \sin^2\theta_1 + \theta_2'^2) + C r_1^2, \end{aligned}$$

le premier membre étant égal au second si l'élasticité est parfaite, et lui étant inférieur si elle est imparfaite.

Si nous nous reportons à l'équation (1), qui permet de calculer la constante h à l'aide des données du mouvement relatives à l'instant du choc, nous voyons que sa valeur h_2 après le choc est inférieure à sa valeur primitive h_1, car on a

$$h_2 \leqq h_1 - M\xi_2'^2.$$

Si alors nous calculons le second membre $f(u)$ de l'équation (2) d'une part avant le choc, d'autre part après le choc, et si nous désignons par $f_1(u)$ et $f_2(u)$ les polynomes obtenus, nous avons

$$f_2(u) - f_1(u) = (h_2 - h_1)(1 - u^2).$$

Soit alors u_1 la valeur de $u = \cos\theta$ au moment du choc, soient v_1 et w_1 les racines de $f_1(u)$ qui comprennent u_1, et soient v_2 et w_2 les racines de $f_2(u)$ qui comprennent ce même nombre u_1; v_1 et w_1 sont les cosinus des angles entre lesquels varie θ dans le mouvement M_1, et, de la même manière, v_2 et w_2 sont les cosinus des angles entre lesquels varie θ dans le mouvement M_2. Le nombre u_1 rend positifs f_1 et f_2; les nombres v_1 et w_1 qui annulent f_1 rendent f_2 négatif, d'après l'égalité précédente et d'après la remarque que $h_2 - h_1$ est négatif; il en résulte qu'on a

$$v_1 < v_2 < u_1 < w_2 < w_1;$$

par suite, les limites entre lesquelles varie θ dans le mouvement M_2 sont plus étroites que dans le mouvement M_1, ce que nous voulions établir.

IV. Lorsque l'élasticité est parfaite, la demi-force vive du système est conservée, et les inégalités que nous avons écrites précédemment se changent en égalités; nous en déduisons, en supposant toujours que la pointe S reste dans le plan horizontal et en remplaçant ζ'_1 et ζ'_2 par leurs valeurs, l'égalité

$$M\xi_2'^2 + (A + Ml^2 \sin^2\theta)(\theta_2'^2 - \theta_1'^2) = 0.$$

Nous ne nous sommes pas servis jusqu'à présent de l'équation des moments par rapport à un axe perpendiculaire au plan $Gz\zeta$; nous allons utiliser celle qu'on obtient en prenant les moments par rapport à un axe passant par G et parallèle à $O\eta$; elle s'écrit

$$(\gamma - l\cos\theta_1)X - \alpha Z + lZ'\sin\theta_1 = A(\theta'_2 - \theta'_1).$$

Cela posé, pour que l'angle θ garde après le choc la valeur θ_1 qu'il a au moment du choc, il faut d'abord que $\cos\theta_1$ ou u_1 satisfasse, en même temps que μ et μ', à la relation analogue à (3), c'est-à-dire qu'on ait

$$(\mu' - \mu u_1)(\mu - \mu' u_1) - MglA(1 - u_1^2)^2 = 0:$$

il faut en outre que θ'_2 soit nul; ces conditions sont du reste suffisantes. Si nous transportons la condition $\theta'_2 = 0$ dans les équations relatives au choc, elles deviennent

$$X = M\xi'_2, \tag{4}$$

$$Z + Z' = Ml\sin\theta_1\theta'_1, \tag{5}$$

$$(\gamma - l\cos\theta_1)X - \alpha Z + lZ'\sin\theta_1 = -A\theta'_1, \tag{6}$$

$$M\xi_2'^2 - (A + Ml^2\sin^2\theta_1)\theta_1'^2 = 0. \tag{7}$$

A ces quatre équations, nous devons ajouter la relation qui exprime que les coordonnées α, γ du point Q satisfont à l'équation de la méridienne de la surface Σ, telle qu'elle est fixée au moment du choc par la valeur u_1, et de plus la relation qui exprime que la percussion P est normale à cette méridienne; nous aurons ainsi six équations entre les sept variables θ'_1, ξ'_2, α, γ, X, Z, Z'; nous pourrons donc en général fixer arbitrairement l'une d'elles; nous choisirons θ'_1 et les autres se trouveront déterminées.

L'équation (7) donne d'abord ξ'_2, puis l'équation (4) donne X; en éliminant Z' entre (5) et (6), nous avons ensuite la relation

$$(\gamma - l\cos\theta_1)X - (\alpha + l\sin\theta_1)Z + (A + Ml^2\sin^2\theta_1)\theta'_1 = 0,$$

que nous pouvons écrire, en tenant compte de la valeur de X,

$$\left(\gamma - l\cos\theta_1 \pm \sqrt{\frac{A}{M} + l^2\sin^2\theta_1}\right)X - (\alpha + l\sin\theta_1)Z = 0.$$

Mais la droite suivant laquelle s'exerce la percussion P a pour équations

$$\eta = 0, \qquad \frac{\xi - \alpha}{X} = \frac{\zeta - \gamma}{Z};$$

la relation précédente exprime que ces équations sont satisfaites par les coordonnées

$$(8)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\xi = -l\sin\theta_1, \qquad \eta = 0, \\ &\zeta = l\cos\theta_1 \mp \sqrt{\frac{A}{M} + l^2\sin^2\theta_1}; \end{aligned} \right.$$

par conséquent, la direction de la percussion P passe par l'un ou l'autre des deux points déterminés par les équations précédentes (8). Nous désignerons ces deux points par I et J, le premier correspondant au signe + devant le radical entrant dans ζ; ils sont tous deux situés sur la verticale du point S, et symétriquement placés par rapport au plan horizontal passant par G;

si G_1 est le point où ce plan coupe la verticale du point S, et si r est le rayon de giration relatif à A, on portera sur SG_1, de part et d'autre de G_1, des segments égaux à $\sqrt{r^2 + \overline{GG_1}^2}$, et les extrémités de ces segments seront les points I et J.

Ces points étant ainsi trouvés, la solution de la question s'achève de la façon suivante : de chacun d'eux on abaisse des normales sur la méridienne de la surface, telle qu'elle est fixée dans le plan $O\xi\zeta$ par la valeur choisie pour θ_1 ; le pied de chacune de ces normales est le point de contact d'une droite D répondant à la question; il y a en général un nombre limité de ces points, à moins que la méridienne ne comprenne un ou plusieurs arcs de cercle de centre I ou J. Lorsque α et γ sont ainsi déterminés, on calcule les autres quantités ξ'_2, X, Z, Z' par les équations

$$(9)\quad \begin{cases} \xi'_2 = -\overline{G_1 I}.\theta'_1, \qquad X = -M.\overline{G_1 I}.\theta'_1, \qquad Z = X\dfrac{\zeta-\gamma}{\xi-\alpha}, \\ Z' = M.\overline{G_1 G}.\theta'_1 - Z, \end{cases}$$

où ξ, ζ désignent les coordonnées de I, et par des équations analogues obtenues en remplaçant I par J; les valeurs de ξ'_2 et de X relatives au point J sont opposées à celles qui se rapportent au point I.

V. Examinons le cas particulier où le corps Σ comprend une tige mince dirigée suivant GS; les positions D' et D'' de D s'obtiendront en abaissant de chacun des points I et J une perpendiculaire sur GS; les pieds Q' et Q'' de ces perpendiculaires sont tels qu'on ait

$$SQ' = SI\cos\theta_1, \qquad SQ'' = SJ\cos\theta_1.$$

Le premier de ces points existe toujours, mais le second n'existe que si la cote du point J est positive, c'est-à-dire si l'on a

$$(10) \qquad l^2 \cos 2\theta_1 > \frac{A}{M},$$

ou bien, en introduisant le rayon de giration $r = \sqrt{\frac{A}{M}}$, si l'on a

$$\cos 2\theta_1 > \frac{r^2}{l^2};$$

cette condition n'est jamais remplie si la répartition des masses de Σ est telle que r soit supérieur à l; dans ce cas, la position D″ ne peut exister pour aucun mouvement M_1.

Si le choc a lieu au pied de la perpendiculaire abaissée du point I sur SG, on a

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi'_2 &= -\sqrt{\frac{A}{M} + l^2 \sin^2\theta_1}\; \theta'_1, \\ X &= -M\sqrt{\frac{A}{M} + l^2 \sin^2\theta_1}\; \theta'_1, \\ Z &= M\sqrt{\frac{A}{M} + l^2 \sin^2\theta_1}\; \operatorname{tang}\theta_1\, \theta'_1, \\ Z' &= M\left(l \cos\theta_1 - \sqrt{\frac{A}{M} + l^2 \sin^2\theta_1}\right) \operatorname{tang}\theta_1\, \theta'_1 \\ &= M\, \overline{SJ}\, \operatorname{tang}\theta_1\, \theta'_1 ; \end{aligned} \right.$$

si au contraire le choc a lieu au pied de la perpendiculaire abaissée de J sur SG, les valeurs ξ'_2, X, Z sont opposées aux précédentes et Z′ a la valeur $M\,\overline{SI}\, \operatorname{tang}\theta_1\, \theta'_1$.

VI. Pour que le point de contact Q″ soit confondu avec la pointe S, il faut que J soit aussi confondu avec ce point, ou que l'on ait $l^2 \cos 2\theta_1 = \frac{A}{M} = r^2$, ce qui exige, comme nous l'avons dit, une répartition convenable des masses de Σ; si cela a lieu, on a

$$SI = 2\,SG_1 \qquad \text{et} \qquad SQ' = 2\,SG_1 \cos\theta_1 = 2l \cos^2\theta_1 = l + \frac{r^2}{l},$$

de sorte que le point Q' est le centre de percussion conjugué de S. Ceci nous indique que si l'on donne à la droite D la position D', la percussion est nulle sur la pointe S; il est facile du reste de le vérifier directement en calculant la valeur de Z' au moyen des équations (11).

VII. Nous avons toujours supposé que la liaison à laquelle est soumise la pointe S est telle qu'elle reste dans le plan horizontal H; nous allons chercher ce qu'il advient si la liaison consiste en un simple appui de la pointe sur le plan, et n'empêche pas le corps de se soulever au-dessus du plan. Si la percussion Z' est positive, la pointe reste appuyée sur le plan; dans le cas contraire, elle est soulevée; nous n'examinerons pas ce qui se passe ultérieurement.

De ce que nous avons dit précédemment, et en particulier des formules (11), nous pouvons déduire les résultats suivants :

Premier cas. — Les points I et J sont tous deux au-dessus de S, ce qui exige que l'inégalité (10) soit satisfaite; il existe deux positions de la droite D et pour chacune d'elles le signe de Z' est celui de θ'_1; si donc θ'_1 est positif, les valeurs de Z' sont positives; dans le cas contraire, elles sont négatives.

Deuxième cas. — L'inégalité (10) n'est pas satisfaite; le point I seul convient à la question; la valeur correspondante de Z' a le signe contraire à celui de θ'_1, puisque SJ est négatif; si donc θ'_1 est positif, Z' est négatif, et, si θ'_1 est négatif, Z' est positif.

En résumé, si l'inégalité (10) est satisfaite, la question posée aura deux solutions lorsque θ'_1 sera positif et n'en aura pas lorsqu'il sera négatif; si l'inégalité (10) n'est pas satisfaite, la question aura une solution lorsque θ'_1 sera négatif et n'en aura pas dans le cas contraire.