NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉMILE TURRIÈRE

Sur la conduction thermique

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 9 (1909), p. 258-260

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__258_1>

[T4c]

SUR LA CONDUCTION THERMIQUE;

PAR M. ÉMILE TURRIÈRE.

Les *Nouvelles Annales* de 1907 ont publié une Note de M. Alezais, dans laquelle l'auteur montre que, P étant la partie réelle et Q le coefficient de l'imaginaire i provenant d'une fonction $f(z)$ à variable complexe

$$f(z) = P + iQ,$$

si l'une des fonctions P, Q est donnée, l'autre en résulte *sans quadrature*. L'auteur applique ensuite ce théorème à diverses questions de licence.

Je signale une propriété importante qui en résulte et qui est relative à l'étude thermique d'un plan indéfini.

Lorsque le potentiel thermique T *est donné, les lignes de courant sont déterminables sans quadrature.*

En effet, l'équation différentielle des lignes de courant est

$$\left(\rho \frac{\partial T}{\partial x} - K_2 \frac{\partial T}{\partial y}\right) dx + \left(\rho \frac{\partial T}{\partial y} + K_1 \frac{\partial T}{\partial x}\right) dy = 0.$$

Par un changement de variable (transformation homographique), on peut se ramener au cas pour lequel

$$K_1 = K_2 = 1;$$

T satisfait alors à l'équation de Laplace. Soit Θ la fonction associée à T, *déterminable sans quadrature*, d'après le théorème de M. Alezais.

En tenant compte des relations

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial \Theta}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial x} = -\frac{\partial T}{\partial y},$$

l'équation différentielle devient

$$\left(\rho\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \Theta}{\partial x}\right) dx + \left(\rho\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial \Theta}{\partial y}\right) dy = 0;$$

d'où l'intégrale

$$\rho T + \Theta = \text{const.}$$

Appliquant au cas d'une source punctiforme (en coordonnées polaires)

$$T = -T_0 \log r, \qquad \Theta = -T_0 \theta,$$

on trouve immédiatement les spirales logarithmiques

$$\rho \log r + \theta = \text{const.}$$

Appliquant au cas de deux sources égales et de signes contraires, on a

$$T = T_0(\log r_1 - \log r_2),$$
$$\Theta = T_0(\theta_1 - \theta_2),$$

d'où les lignes de courant (¹).

P.-S. — J'ai reçu une observation relative à mon Mémoire *Sur certains systèmes orthogonaux du plan*. Il s'agit des surfaces considérées par M. Laurent. Cet auteur ne s'était pas préoccupé de l'équation aux dérivées partielles de ces surfaces. Comme le calcul ressemble à celui qui avait été fait par Jamet, j'ai cru devoir signaler ce dernier calcul. La Note est peut-être

---

(¹) J'adopte les notations du *Cours de Physique* que publie M. H. Bouasse. C'est donc de préférence à cet Ouvrage que le lecteur devra se reporter : Tome II, *Thermodynamique, Théorie des ions*, au paragraphe 257. Il pourra lire aussi le paragraphe 52 du Tome V (*Électroptique, ondes hertziennes*).

obscure, mais je n'ai commis aucune erreur : *Étant donnée une intégrale* P *de l'équation de Laplace, il lui correspond une fonction analytique* $f'(z)$ *dont le module est la racine carrée de l'invariant différentiel du premier ordre de* P.

En prenant, en effet,

$$f(z) = P + iQ,$$

on a, par dérivation,

$$f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x} - i\frac{\partial P}{\partial y};$$

d'où

$$|f'(z)| = \sqrt{\Delta_1 P}.$$

Il est, d'ailleurs, possible d'obtenir l'équation très rapidement. Soit z une fonction analytique et soit Z la fonction analytique définie par la relation

$$z = e^Z;$$

on a, par définition,

$$Z = \log|z| + i \arg.z.$$

Des équations

$$\Delta_2 Z = 0, \qquad \Delta_2(\arg.z) = 0$$

résulte l'équation des surfaces

$$\Delta_2(\log|z|) = 0.$$