

MAURICE FOUCHÉ

**Quelques théorèmes de géométrie projective
relatifs à des triangles et à des coniques**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 9
(1909), p. 1-35

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__1_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1909, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

[L'16a]

QUELQUES THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE PROJECTIVE RELATIFS A DES TRIANGLES ET A DES CONIQUES;

PAR M. MAURICE FOUCHÉ,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

On démontre, en Géométrie élémentaire, un assez grand nombre de théorèmes relatifs à des droites concourantes, à des points en ligne droite sur les côtés d'un triangle. Les cercles circonscrits, inscrits, exinscrits, y interviennent souvent. En transformant ces théorèmes par la perspective, on en obtient de plus généraux où les cercles sont remplacés par des coniques. Je me propose, dans ce travail, de suivre la marche inverse. J'établirai directement les théorèmes les plus généraux, et j'en déduirai, comme cas particuliers, les propositions classiques. Les propriétés de l'homographie et de l'involution, les théorèmes de Pascal et de Brianchon, seront les moyens de démonstration employés.

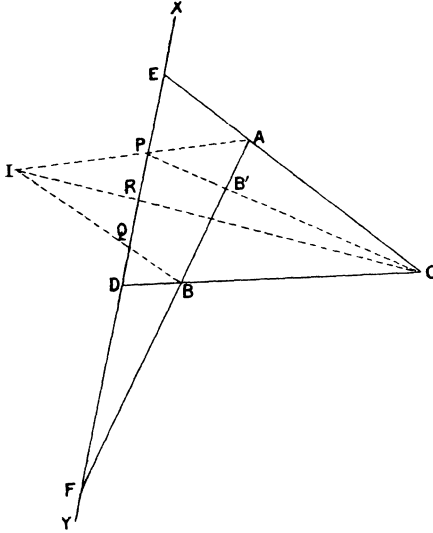
THÉORÈME I. — *Pour que trois droites issues des sommets d'un triangle soient concourantes, il faut et il suffit que ces trois droites et les côtés correspon-*

Ann. de Mathémat., 4^e série, t. IX. (Janvier 1909.)

dants du triangle déterminent sur une droite du plan trois couples de points en involution.

Soient (*fig. 1*) le triangle ABC dont les côtés BC, CA, AB coupent respectivement la droite XY aux

Fig. 1.



points D, E, F, et les trois droites concourantes AI, BI, CI qui coupent respectivement XY en P, Q, R. Je dis que les six points D, P; E, Q; F, R forment trois couples appartenant à une même involution sur la droite XY. Considérons en effet le faisceau des coniques passant par les quatre points A, B, C, I. Les couples de droites de ce faisceau sont : 1° BC et AI; 2° CA et BI; 3° AB, CI, lesquels coupent XY, le premier en D et P, le second en E et R, le troisième en F et R. Donc ces trois couples de points font partie d'une involution qui admet pour points doubles les points de

contact de XY avec les deux coniques du faisceau tangentes à XY .

On peut encore démontrer ce théorème en laissant fixes les points E, F, Q, R, A, B et en faisant pivoter la droite BC autour du point B . Le point C est mobile sur AE . On construit le point I par l'intersection de la droite fixe BQ avec la droite mobile CR , puis le point P par l'intersection de AI avec XY . Alors on reconnaît que D et P sont liés homographiquement. Si l'on met D en E , C vient en E , I en Q et P aussi en Q ; si l'on met D en Q , C et I se confondent à l'intersection de BQ et AE , et le point P vient en E . De même, si D vient en F , P vient en R ; et s'il vient en R , P vient en F . Donc l'homographie est une involution dont E, Q et F, R sont deux couples. c. q. f. d.

Réciproquement, si les six points sont en involution, joignons BQ et CR qui se coupent en I , puis AI qui coupe XY en P' . P' sera conjugué à D d'après la proposition directe. Donc P' coïncide avec P , et les trois droites sont concourantes.

Comme exemple, considérons les médianes AM, BN, CP d'un triangle ABC . Si l'on coupe toute la figure par une parallèle à BC , le point D sera rejeté à l'infini, et l'on verra facilement que les points d'intersection avec XY sont symétriques par rapport au point d'intersection P de AM avec XY , ce qui constitue une involution dont P est le point central; d'où il suit que les trois médianes sont concourantes.

Corollaires. — 1° Échangeons les points D et P ; pour cela joignons PC qui coupe AB en B' . Les trois droites $AD, B'Q, CR$ sont concourantes.

2° Si l'on prend pour XY la droite de l'infini, on obtient la proposition suivante :

Pour que trois droites issues des sommets d'un triangle soient concourantes, il faut et il suffit que leurs directions et celles des côtés correspondants du triangle soient respectivement conjuguées par rapport à une conique.

Si cette conique est un cercle, on trouve que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

THÉORÈME II (corrélatif du précédent). — *Pour que trois points pris sur les trois côtés d'un triangle soient en ligne droite, il faut et il suffit que les droites qui joignent un point du plan à ces trois points forment avec celles qui joignent le même point aux trois sommets correspondants du triangle trois couples d'une involution autour de ce point.*

THÉORÈME III. — *Si trois droites concourantes issues des sommets d'un triangle rencontrent une droite aux mêmes points que les trois côtés d'un autre triangle, les trois droites qui joignent les sommets du second triangle aux points d'intersection de la droite avec les côtés du premier triangle sont concourantes.*

Soient en effet D, E, F, D', E', F' les intersections avec une droite XY des côtés $BC, CA, AB, B'C', C'A', A'B'$ des deux triangles. Puisque les droites AD', BE', CF' sont concourantes par hypothèse, les six points $D, E, F; D', E', F'$ sont, d'après le théorème I, respectivement conjugués dans une involution sur la droite XY . Alors, d'après la réciproque, les trois droites $A'D, D'E, C'F$ sont concourantes.

C. Q. F. D.

Remarque. — Si la droite XY est rejetée à l'infini, on obtient la proposition suivante :

Si les droites menées des sommets d'un triangle ABC parallèlement aux côtés correspondants d'un second triangle A'B'C' sont concourantes, les droites menées des sommets de A'B'C' parallèlement aux côtés correspondants du triangle ABC sont aussi concourantes.

Par rotation ou retournement d'un des deux triangles on en déduit le théorème relatif aux quadrangles métapolaires, et en particulier le théorème relatif aux triangles orthologiques.

THÉORÈME IV (corrélatif du précédent). — *Si trois droites issues d'un même point O coupent les côtés d'un triangle en trois points en ligne droite, et si un deuxième triangle a ses sommets respectivement sur chacune de ces trois droites, les droites qui joignent le point O aux sommets du premier triangle déterminent sur les côtés correspondants du second trois points en ligne droite.*

Si l'on a sur une droite six points formant trois couples d'une involution et qu'on prenne les conjugués de ces six points dans une nouvelle involution sur la même droite, les six nouveaux points formeront encore trois couples d'une nouvelle involution. Cela résulte immédiatement de ce que la propriété involutive est projective.

Soit par exemple, sur une droite XY, trois points P, Q, R formant une involution avec trois autres points D, E, F, et une autre avec trois autres points D', E', F'. Si nous transformons les six points P, Q, R, D, E, F au moyen de la seconde involution, nous aurons les six nouveaux points D', E', F'; P', Q', R' qui formeront encore une involution. Si donc trois droites

concourantes issues des trois sommets d'un triangle coupent une droite XY en trois points P, Q, R formant une involution avec les points D', E', F' où la même droite XY coupe les trois côtés d'un deuxième triangle, les droites qui joindront les sommets correspondants de ce triangle aux points P, Q, R , conjugués des points d'intersection D, E, F , des côtés du premier triangle dans l'involution définie par P, Q, R ; D', E', F' seront concourantes.

Si la droite XY est rejetée à l'infini, on obtient le théorème suivant :

THÉORÈME V. — *Si trois droites concourantes issues des sommets d'un triangle ont leurs directions respectivement conjuguées, par rapport à une conique quelconque, des directions des côtés d'un second triangle, les droites de directions conjuguées de celles des côtés du premier triangle par rapport à la même conique, menées par les sommets correspondants du second triangle, sont aussi concourantes.*

Si la conique est un cercle, on retrouve encore les triangles orthologiques.

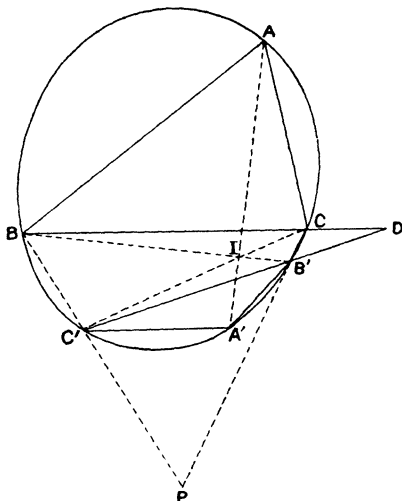
THÉORÈME VI. — *Si deux triangles homologues $ABC, A'B'C'$ sont inscrits dans une même conique, les droites AP, BQ, CR qui passent respectivement par les points d'intersection P de BC' et CB' ; Q , de CA' et AC' ; R de AB' et BA' sont concourantes.*

En effet, soient I le centre d'homologie des deux triangles (*fig. 2*); D, E, F les points d'intersection respectifs de BC et $B'C'$, CA et $C'A'$, AB et $A'B'$. D'abord, les six points P, Q, R, D, E, F sont sur la

(7)

polaire de I qui est l'axe d'homologie des deux triangles.
De plus, la polaire de P est la droite DI. Donc P et D

Fig. 2.



sont conjugués par rapport à la conique ; il en est de même de Q et E et de R et E. Donc les six points sont en involution sur l'axe d'homologie des deux triangles, et d'après le théorème I les trois droites AP, BQ, CR sont concourantes, ainsi que les trois droites A'P, B'Q, C'R.

Si l'on remarque que l'hexagone $AB'CA'BC'$ est circonscrit à une conique à cause du théorème de Brianchon, on peut énoncer la proposition sous la forme suivante :

Si un hexagone est inscrit à une conique et circonscrit à une autre, les trois droites qui joignent chacun des trois sommets non consécutifs au point

d'intersection des deux côtés opposés ne passant pas par ce sommet-là sont concourantes.

THÉORÈME VII (corrélatif du précédent). — *Soient deux triangles homologues ABC, A'B'C' circonscrits à une même conique; P le point d'intersection du côté BC avec la droite qui joint les intersections de AB avec A'C' et de AC avec A'B'; Q et R les points obtenus par la construction analogue sur CA et AB. Les trois points P, Q, R sont en ligne droite.*

Ou encore :

Si un hexagone est inscrit à une conique et circonscrit à une autre, les points d'intersection de chacun des trois côtés non consécutifs avec la diagonale qui joint deux sommets opposés dont aucun n'est sur ce côté-là sont en ligne droite.

Il convient de remarquer que ces deux théorèmes s'établissent aisément à l'aide du théorème de Brianchon ou du théorème de Pascal, si l'on considère l'hexagone formé par les trois sommets ou les trois côtés considérés, et les trois diagonales. Par exemple, pour le théorème VI, il suffit de considérer l'hexagone formé par les six droites BC', CB', CA', AC', AB', BA' dans l'ordre indiqué. Ces six droites sont tangentes à une même conique, puisque ce sont, dans un autre ordre, les côtés de l'hexagone AB'CA'BC'. Mais, dans l'ordre indiqué, les sommets successifs sont P, C, Q, A, R, B, et les trois diagonales concourantes sont bien PA, CR, QB.

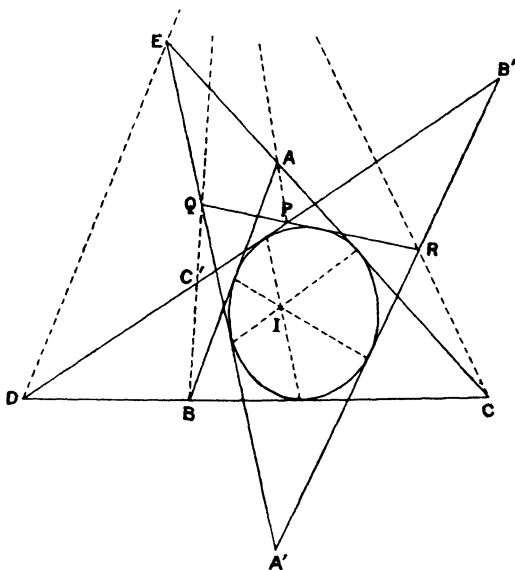
THÉORÈME VIII. — *Si deux triangles homologues sont circonscrits à une même conique, les droites qui joignent les sommets de l'un aux points*

de rencontre des côtés correspondants de l'autre avec une tangente à la conique sont concourantes, et le point de concours est sur l'axe d'homologie des deux triangles.

D'abord les trois droites sont concourantes, parce que les six côtés des deux triangles sont des tangentes en involution sur la conique et qu'elles déterminent ainsi sur une septième tangente six points en involution.

Je vais maintenant faire voir que, si l'on déplace la tangente, le lieu du point de concours des trois droites est l'axe d'homologie des deux triangles. Soient ABC , $A'B'C'$ (*fig. 3*) les deux triangles; I leur centre d'ho-

Fig. 3.



mologie, qui est aussi le point de concours des droites qui joignent les points de contact des côtés correspon-

dants (¹); P, Q, R les points d'intersection respectifs de la tangente avec $B'C'$, $C'A'$ et $A'B'$; ω le point de rencontre de BQ et CR. Si l'on se donne la direction de $B\omega$, le point Q sera complètement déterminé sur $A'C'$; donc aussi la tangente, le point R sur $A'B'$, et la droite $C\omega$. Donc déjà $B\omega$ et $C\omega$ sont des rayons homologues de deux faisceaux homographiques autour de B et C. Si l'on donne à $B\omega$ la direction de BC, la tangente mobile se confond avec BC et la droite $C\omega$ aussi. Donc le lieu de ω se compose de la droite BC, partie singulière, et d'une autre droite. Si maintenant on fait coïncider la tangente mobile avec BA, $B\omega$ se confond aussi avec BA, le point R est à l'intersection de BA avec $B'A'$, et ce point-là est le point ω ; mais il est conjugué de I par rapport à la conique. De même, si l'on fait coïncider la tangente mobile avec CA, le point ω viendra au point d'intersection de AC avec $A'C'$ qui est aussi conjugué de I. Donc le lieu du point ω est la polaire de I qui est bien l'axe d'homologie des deux triangles. Remarquons que ce raisonnement prouve aussi que les trois droites AP, BQ, CR sont concourantes, puisque deux quelconques d'entre elles doivent se couper sur l'axe d'homologie.

Enfin le même théorème s'établit facilement à l'aide du théorème de Brianchon. Soient D, E, F les points d'intersection des côtés homologues des deux triangles. Considérons l'hexagone circonscrit BCEQRF dont les trois diagonales BQ, CR, EF passent par un même

(¹) Il y a bien des manières de le démontrer. La plus simple consiste à transformer toute la figure homologiquement avec le même centre et le même axe que les deux triangles. Les deux triangles ne font que s'échanger et la conique, restant tangente aux six droites, se transforme en elle-même. Donc les points de contact homologues sont alignés sur le centre d'homologie.

point, d'où il suit que BQ et CR se coupent bien sur EF qui est l'axe d'homologie.

On peut remarquer que les six côtés des deux triangles pris dans l'ordre AB, C'A', BC, A'B', CA, B'C' forment un hexagone circonscrit à la conique et inscrit dans une autre, puisque, d'après l'homologie des deux triangles, les côtés opposés de cet hexagone se coupent en trois points en ligne droite. On obtient alors le nouvel énoncé, équivalent au précédent :

Soit un hexagone inscrit à une conique et circonscrit à une autre; numérotons les côtés de 1 à 6, et joignons les points d'intersection des côtés 1, 3; 3, 5; 5, 1, respectivement aux points où les côtés 2, 4, 6 sont coupés par une septième tangente à la conique inscrite. Les trois droites ainsi obtenues concourent sur la droite de Pascal relative à l'hexagone.

THÉORÈME IX (corrélatif du précédent). — *Si deux triangles homologiques sont inscrits dans une même conique, les points d'intersection des côtés de l'un avec les droites qui joignent les sommets correspondants de l'autre à un point de la conique sont sur une même droite qui passe par le centre d'homologie des deux triangles.*

Ou encore :

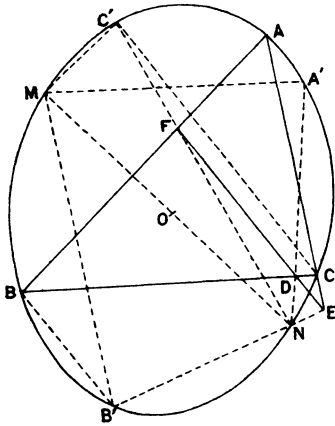
Soit un hexagone inscrit à une conique et circonscrit à une autre; numérotons les sommets de 1 à 6, et prenons les points où les diagonales 1, 3; 3, 5; 5, 1 coupent respectivement les droites qui joignent les sommets 2, 4, 6 à un septième point de la conique circonscrite. Les trois points ainsi obtenus sont en ligne droite avec le point de Brianchon relatif à l'hexagone.

La réciproque, qu'il est facile de démontrer soit par l'absurde, soit directement, peut s'énoncer ainsi :

Si un triangle est inscrit à une conique, les trois droites qui joignent un point de cette conique aux points d'intersection des trois côtés du triangle avec une droite (D) coupent la conique en trois autres points qui sont les sommets d'un triangle homologique au premier triangle, et le centre d'homologie des deux triangles est sur la droite (D).

Supposons la droite (D) rejetée à l'infini. Par un point M de la conique circonscrite au triangle ABC (fig. 4), nous mènerons les cordes MA', MB', MC',

Fig. 4.



respectivement parallèles aux côtés du triangle, et nous obtiendrons le triangle A'B'C' homologique de ABC avec le centre d'homologie à l'infini. Prenons maintenant le point N diamétralement opposé de M et joignons-le à A', B', C'. D'après le théorème IX, les trois points D, E, F où les droites NA', NB', NC' coupent

les côtés correspondants du triangle ABC seront sur une même droite passant par le centre d'homologie, c'est-à-dire parallèle aux droites AA', BB', CC'. Mais NA' est la corde supplémentaire de MA'. Sa direction est donc conjuguée de celle de BC. Donc :

Si une conique est circonscrite à un triangle, cette conique est le lieu des points N tels que les points de rencontre des côtés du triangle avec des droites de directions conjuguées de celles de chacun de ces trois côtés, menées par le point N, soient en ligne droite. Cette droite et les trois droites qui joignent les sommets du triangle aux points où les droites correspondantes issues de N coupent une seconde fois la conique sont parallèles.

Si la conique est un cercle, on retrouve le théorème de Simpson avec la propriété qu'à la droite de Simpson d'être parallèle aux trois droites AA', BB', CC'.

THÉORÈME X. — *Si deux triangles inscrits l'un dans l'autre sont homologues, les droites qui joignent les sommets du triangle circonscrit aux points d'intersection d'une droite avec les côtés correspondants de l'un des deux coupent les côtés correspondants de l'autre en trois points en ligne droite.*

Soient le triangle ABC (*fig. 5*) et le triangle inscrit homologue $\alpha\beta\gamma$. Soient de plus P, Q, R les intersections respectives de $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ avec une droite XY; D, E, F les intersections respectives de AP, BQ, CR avec les côtés opposés du triangle ABC. Il faut démontrer que D, E, F sont en ligne droite.

Si une conique est inscrite dans un triangle, les parallèles à chacun des trois côtés menées par le sommet opposé coupent les cordes de contact correspondantes en trois points en ligne droite.

THÉORÈME XI (corrélatif du précédent). — *Si deux triangles inscrits l'un dans l'autre sont homologues, les trois droites qui joignent les points où les côtés du triangle inscrit sont coupés par trois droites concourantes issues des sommets correspondants de l'un des deux aux sommets correspondants de l'autre sont concourantes.*

Considérons par exemple un triangle ABC et les pieds des trois hauteurs D, E, F. Si trois droites concourantes issues des sommets A, B, C coupent les côtés correspondants du triangle DEF aux points P, Q, R, les trois droites DP, EQ, FR sont concourantes.

Si H est l'orthocentre du triangle, on sait que les quatre points A, B, C, H sont les centres des cercles tangents aux trois côtés du triangle DEF. On sait aussi que les droites qui joignent les sommets d'un triangle aux points de contact des côtés opposés avec l'un de ces cercles sont concourantes. Donc :

Les droites qui joignent les trois sommets d'un triangle aux projections de l'orthocentre ou d'un des trois sommets sur les trois côtés correspondants du triangle formé par les pieds des hauteurs sont concourantes.

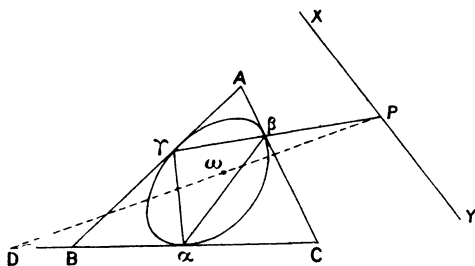
Si l'on considère les trois cercles exinscrits au triangle DEF, on verra aussi que les perpendiculaires menées des trois sommets du triangle sur les côtés correspondants du triangle DEF sont concourantes; mais

cette proposition est une conséquence immédiate du théorème relatif aux triangles orthologiques.

THÉORÈME XII. — *Soient un triangle ABC circonscrit à une conique et une transversale XY : les trois droites qui joignent le pôle de XY par rapport à la conique aux points d'intersection de XY avec les côtés du triangle qui a pour sommets les points de contact coupent les côtés correspondants du triangle ABC en trois points en ligne droite.*

Soient α, β, γ (fig. 6) les trois points de contact,

Fig. 6.



ω le pôle de XY; P, Q, R les intersections respectives de XY avec $\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$; D, E, F celles de $P\omega$ avec BC, de $Q\omega$ avec CA, et de $R\omega$ avec AB. Il faut démontrer que les trois points D, E, F sont en ligne droite. Or le pôle de $A\omega$ devant se trouver sur $\beta\gamma$ et sur XY est en P. Donc les droites ωA et ωP ou ωD sont conjuguées par rapport à la conique. Donc les six droites $\omega A, \omega D; \omega B, \omega E; \omega C, \omega F$ forment bien trois couples d'involution autour de ω , ce qui est la condition pour que les trois points D, E, F soient en ligne droite (théorème II).

Si la droite XY est rejetée à l'infini, le point ω est le centre de la conique, et l'on a la proposition suivante :

Si une conique est inscrite à un triangle, les parallèles aux cordes de contact menées par le centre de la conique coupent les côtés correspondants du triangle circonscrit en trois points en ligne droite.

THÉORÈME XIII (corrélatif du précédent). — *Si une conique est inscrite à un triangle, qu'on mène par les sommets de ce triangle trois droites concourantes, et qu'on coupe ces trois droites par la polaire de leur point de concours par rapport à la conique, les droites qui joignent les points ainsi obtenus aux points de contact de la conique avec les côtés correspondants du triangle sont concourantes.*

Si le point de concours est le centre de la conique, les droites qui joignent les sommets du triangle circonscrit à ce centre ont leurs directions conjuguées respectivement de celles des cordes de contact, et, comme il faut leur mener des parallèles par les points de contact, on retombe sur le corollaire du théorème I.

Considérons un triangle et l'un des cercles inscrit ou exinscrits. On reconnaît de suite que la polaire de l'orthocentre est la droite qui passe par les points où les parallèles menées du centre à chacun des trois côtés coupent les cordes de contact correspondantes. Donc cette droite coupe les trois hauteurs en trois points qui, joints aux points de contact correspondants, donnent trois droites concourantes.

Si l'on remarque que les pôles des bissectrices des angles extérieurs B et C d'un triangle sont respectivement aux milieux des cordes de contact $\alpha\gamma$ et $\alpha\beta$ du cercle inscrit, on obtient la proposition suivante :

La droite qui joint les milieux de deux cordes de contact du cercle inscrit dans un triangle coupe la

bissectrice perpendiculaire à la troisième corde de contact et les bissectrices des deux autres angles extérieurs en trois points qui, joints aux points de contact correspondants, donnent trois droites concourantes.

THÉORÈME XIV. — *Soient un triangle ABC circonscrit à une conique et une transversale UV ; les trois droites qui joignent le pôle de UV par rapport à la conique aux points d'intersection de UV avec les côtés du triangle coupent les cordes de contact correspondantes en trois points en ligne droite.*

Supposons (*fig. 6*) que les trois points D, E, F soient en ligne droite et que ω soit le pôle de cette droite. La droite $\omega\alpha$ a pour pôle le point D. Donc $\omega\alpha$ et ωD sont deux droites conjuguées. Donc les six droites $\omega\alpha$, ωD ; $\omega\beta$, ωE ; $\omega\gamma$, ωF forment bien trois couples d'involution autour du point ω , ce qui est la condition pour que leurs points d'intersection respectifs avec les côtés du triangle $\alpha\beta\gamma$ soient en ligne droite.

Si la droite UV est rejetée à l'infini, ω est le centre et l'on a la proposition suivante :

Si une conique est circonscrite à un triangle, les parallèles menées du centre aux tangentes aux trois sommets du triangle coupent les côtés correspondants de celui-ci en trois points en ligne droite.

Si la conique est un cercle, la droite des trois points est la polaire de l'orthocentre du triangle formé par les trois tangentes.

THÉORÈME XV (corrélatif du précédent). — *Si une conique est inscrite à un triangle, qu'on mène par les points de contact trois droites concourantes, et*

qu'on coupe ces trois droites par la polaire de leur point de concours par rapport à la conique, les droites qui joignent les points ainsi obtenus aux trois sommets du triangle sont concourantes.

Considérons un triangle ABC et l'un des cercles inscrit ou exinscrits; soient α , β , γ les points de contact. La polaire de l'orthocentre du triangle $\alpha\beta\gamma$ est la droite qui passe par les points d'intersection de chacun des côtés du triangle ABC avec la parallèle menée du centre du cercle inscrit à la corde des contacts correspondante.

Donc cette droite coupe les trois hauteurs du triangle $\alpha\beta\gamma$ en trois points qui, joints aux trois sommets correspondants du triangle ABC, donnent trois droites concourantes.

THÉORÈME XVI. — *Si deux triangles homologues sont inscrits à une même conique, chacun d'eux est homologue au triangle formé par les tangentes à la conique menées par les sommets de l'autre.*

Soient $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ les deux triangles homologues. A cause du théorème de Brianchon, l'hexagone $\alpha\beta'\gamma\alpha'\beta\gamma'$ est circonscrit à une conique; on peut donc énoncer la proposition comme il suit :

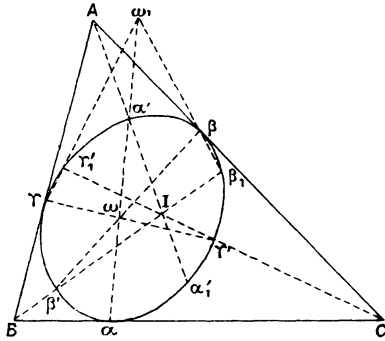
Si un hexagone est inscrit à une conique et circonscrit à une autre, les triangles formés par trois sommets non consécutifs et les tangentes à la conique circonscrite aux trois autres sommets sont homologues.

Soient ABC (*fig. 7*) le triangle formé par les tangentes en α , β , γ , et ω le centre d'homologie des deux

triangles $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$. Il s'agit de démontrer que les trois droites $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$ sont concourantes.

Donnons-nous comme fixes le triangle ABC et la conique, et par conséquent les points de contact α , β , γ ,

Fig. 7.



et enfin le point α' . Menons maintenant par B une sécante quelconque qui coupe la conique en β' et β_1 . En joignant $\beta\beta'$ on obtient sur $\alpha\alpha'$ le point ω , et, en joignant $\beta\beta_1$, le point ω_1 . $\gamma\omega$ donnera sur la conique un second point d'intersection γ' et $\gamma\omega_1$ un second point d'intersection γ_1 . Inversement, si l'on se donne γ' , on pourra construire successivement ω , β' , β_1 , ω_1 et γ_1 , et, si l'on se donne γ_1 , on referra les mêmes constructions en sens inverse, et l'on retrouvera γ' . Donc γ' et γ_1 forment sur la conique une involution. En donnant à $B\beta'$ les directions BC et BA , on trouvera les points doubles de l'involution qui sont α et β . Donc γ' et γ_1 sont en ligne droite avec C . De plus, les droites $B\beta'\beta_1$ et $C\gamma'\gamma_1$ sont deux rayons homologues de deux faisceaux homographiques autour de B et C , et à BC correspond CB . Donc, le lieu du point d'intersection I de $B\beta'$ avec $C\gamma'$ est une droite. Si l'on donne à $B\beta'$ la

direction BA, β' vient en γ et γ' en β . Donc, à la droite BA correspond la droite CA, et le point A fait partie du lieu. Enfin, si l'on met β' en α' , ω vient aussi en α' ainsi que γ' , et α' fait encore partie du lieu. Donc, le lieu du point I est la droite $A\alpha'$, ce qui démontre le théorème.

Remarque I. — Ce théorème est identique à son corrélatif.

Remarque II. — Si l'on mène les tangentes à la conique aux points α' , β' , γ' , le triangle ainsi formé sera homologique au triangle ABC (voir la note de la p. 10) et l'axe d'homologie sera la polaire de ω .

Remarque III. — Considérons encore le triangle ABC circonscrit à la conique, α , β , γ étant les points de contact. Menons par les sommets de ce triangle trois droites concourantes AI, BI, CI qui rencontrent chacune la conique en deux points, savoir : α' , α'_1 ; β' , β'_1 ; γ' , γ'_1 . Joignons $\beta'\beta$ et $\gamma'\gamma$ qui se coupent en ω , puis $\alpha\omega$ qui coupe la conique en un second point α'' . D'après la proposition précédente, $A\alpha''$ doit passer en I. Donc α'' est l'un des points α' ou α'_1 ; si c'est α' , les trois droites $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ sont concourantes. Remarquons maintenant que α' et α'_1 étant en ligne droite avec A sont sur la conique deux points conjugués d'une involution dont β et γ sont les points doubles. Il en résulte que le faisceau des quatre droites $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\alpha'$, $\alpha\alpha'_1$ est harmonique. Donc, puisque les trois droites $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ sont concourantes, les trois droites $\alpha\alpha'_1$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ coupent les côtés opposés du triangle $\alpha\beta\gamma$ en trois points en ligne droite. Donc :

THÉORÈME XVII. — *Si un triangle est inscrit dans*

une conique, qu'on considère les points d'intersection de la conique avec trois droites concourantes issues des pôles des côtés, et qu'on joigne aux sommets du triangle inscrit trois de ces points d'intersection pris chacun sur la droite correspondante, ou bien les trois droites ainsi obtenues sont concourantes, ou bien elles coupent les côtés correspondants du triangle inscrit en trois points en ligne droite.

Si la conique est un cercle, et si le point de concours I des trois droites est le centre, les droites $\alpha\alpha'$, $\alpha\alpha'$, seront les bissectrices des angles formés par $\alpha\beta$ et $\alpha\gamma$. On retrouve ainsi le théorème relatif aux bissectrices des angles d'un triangle.

THÉORÈME XVIII (corrélatif du précédent). — *Un triangle étant circonscrit à une conique, on coupe par une transversale le triangle formé par les trois cordes de contact, et de chacun des trois points ainsi obtenus on mène les tangentes à la conique. Les points d'intersection de chacun des côtés du triangle circonscrit avec l'une des tangentes issues du point correspondant, ou bien sont en ligne droite, ou bien sont les pieds de trois droites concourantes issues des sommets du triangle circonscrit.*

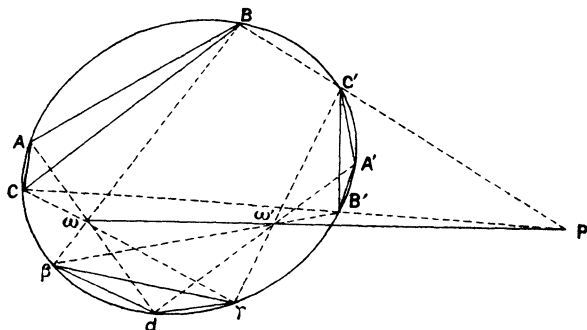
En particulier, si l'on suppose que la conique soit un cercle et que la transversale soit rejetée à l'infini, on obtient le théorème corrélatif de celui des bissectrices.

THÉORÈME XIX. — *Si deux triangles ABC , $A'B'C'$ inscrits dans une conique sont l'un et l'autre homologues à un troisième triangle inscrit dans la*

même conique, les deux centres d'homologie sont sur la droite de Pascal relative à l'hexagone inscrit $AB'CA'BC'$.

Soient $\alpha\beta\gamma$ (fig. 8) le troisième triangle, ω et ω' ses

Fig. 8.



centres d'homologie respectifs avec ABC et $A'B'C'$. Il faut montrer que les trois points d'intersection P , Q , R de BC' et CB' ; CA' et AC' ; AB' et BA' , et les deux points ω et ω' sont en ligne droite. Il suffit de considérer l'hexagone inscrit $\beta BC' \gamma CB'$. βB et γC se coupent en ω , BC' et CB' en P , $C'\gamma$ et $B'\beta$ en ω' . Donc P est sur $\omega\omega'$ et il en est évidemment de même de Q et de R .

Réciproquement, tout triangle inscrit dans la conique et homologique à l'un des deux triangles ABC , $A'B'C'$ est homologique à l'autre si le centre d'homologie est sur la droite de Pascal PQR .

Supposons en effet que $\alpha\beta\gamma$ soit homologique à ABC et inscrit dans la conique. Laissant A' et B' , remplaçons C' par un autre point C'' de la conique, de manière que $A'B'C''$ soit homologique à $\alpha\beta\gamma$. La droite $\omega\omega'$ sera la droite de Pascal de l'hexagone $AB'CA'BC''$.

Mais celle de l'hexagone $AB'CA'BC'$ contient en commun avec la précédente les points R et ω . Donc les deux droites se confondent, et C'' coïncide avec C' .

THÉORÈME XX (corrélatif du précédent). — *Si deux triangles dont les côtés sont désignés par a, b, c ; a', b', c sont circonscrits à une conique et homologues à un troisième triangle circonscrit à la même conique, les deux axes d'homologie passent par le point de Brianchon relatif à l'hexagone circonscrit $ab'ca'bc'$.*

Réciproquement, tout triangle circonscrit à la conique et homologue à l'un des deux triangles $abc, a'b'c'$ est homologue à l'autre si l'axe d'homologie passe par le point de Brianchon relatif à l'hexagone $ab'ca'bc'$.

THÉORÈME XXI. — *Si trois triangles inscrits dans la même conique sont homologues deux à deux, les trois centres d'homologie sont les sommets d'un triangle autopolaire dont les côtés sont les droites de Pascal des hexagones inscrits définis comme au théorème XIX.*

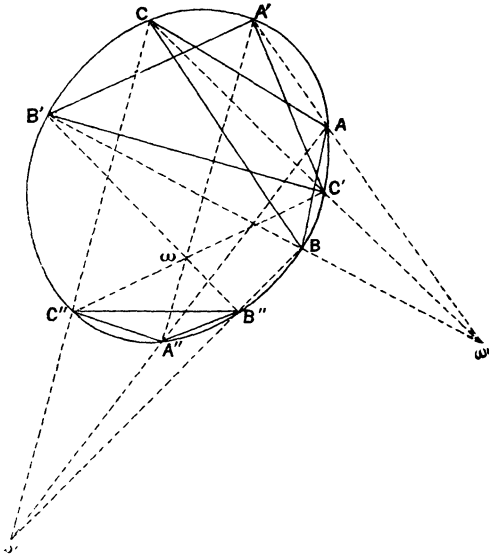
Soient ω (*fig. 9*) le centre d'homologie des triangles inscrits $A'B'C', A''B''C''$; ω' celui des triangles $A''B''C'', ABC$, et ω'' celui de ABC et $A'B'C'$. La polaire du point ω passe par les points d'intersection de $B'C''$ avec $B''C'$, de $C'A''$ avec $C''A'$ et de $A'B''$ avec $A''B'$. C'est donc la droite de Pascal de l'hexagone $A'B''C'A''B'C''$, laquelle, d'après le théorème XIX, contient ω' et ω'' .

THÉORÈME XXII (corrélatif du précédent). — *Si trois triangles circonscrits à la même conique sont homologues deux à deux, les trois axes d'homologie*

forment un triangle autopolaire dont les sommets sont les points de Brianchon relatifs aux hexagones définis comme au théorème *XX*.

THÉORÈME *XXIII* (réciproque du théorème *XXI*). —

Fig. 9.



Si deux triangles inscrits dans une conique sont homologues à un troisième inscrit dans la même conique, et si les deux centres d'homologie sont conjugués par rapport à la même conique, les deux triangles sont homologues.

Soient en effet ABC , $A'B'C'$, $A''B''C''$ les trois triangles inscrits; ω le centre d'homologie de $A'B'C'$ et $A''B''C''$, ω' celui de ABC et $A''B''C''$. ω' est par hypothèse sur la polaire de ω . Mais cette polaire est la

droite de Pascal relative à l'hexagone $A'B''C'A''B'C''$. Donc, d'après la réciproque du théorème XIX, le triangle ABC , homologique à $A''B''C''$, l'est aussi à $A'B'C'$.

C. Q. F. D.

THÉORÈME XXIV (corrélatif du précédent, réciproque du théorème XXII). — *Si deux triangles circonscrits à une conique sont homologiques à un troisième triangle circonscrit à la même conique, et si les deux axes d'homologie sont conjugués par rapport à la conique, les deux triangles sont homologiques.*

Si la conique est un cercle, on obtient la proposition suivante :

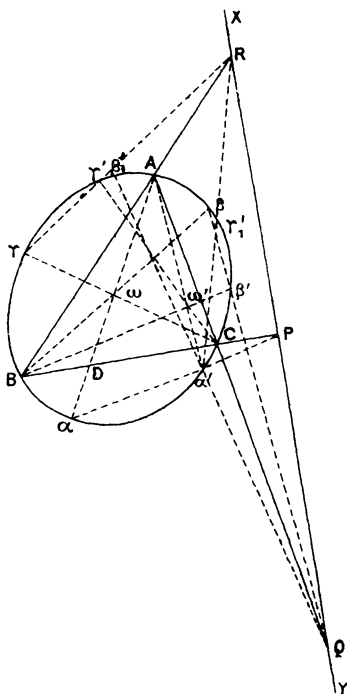
Soient, sur les côtés d'un triangle ABC , trois points en ligne droite P, Q, R . Menons de chacun de ces points la deuxième tangente au cercle inscrit; nous formons ainsi un nouveau triangle circonscrit $A'B'C'$. Coupons-le par le diamètre perpendiculaire à la droite PQR , et soient P', Q', R' les points d'intersection avec $B'C', C'A', A'B'$. Les secondes tangentes menées au cercle par les points P', Q', R' coupent les trois côtés du triangle ABC en trois points situés sur une même droite parallèle à PQR .

En effet, le triangle $A'B'C'$ est homologique au triangle ABC et aussi au triangle $A''B''C''$ formé par les secondes tangentes issues de P', Q' et R' . De plus, les deux axes d'homologie sont conjugués. Donc les deux triangles ABC et $A''B''C''$ sont homologiques, et l'axe d'homologie devant former un triangle autopolaire avec deux droites rectangulaires dont l'une est un diamètre est parallèle à l'autre.

THÉORÈME XXV. — *Si deux triangles homologues sont inscrits dans une même conique, les droites qui joignent les sommets de l'un aux points d'intersection des côtés correspondants de l'autre avec une transversale déterminent sur la conique trois nouveaux points qui sont les sommets d'un triangle homologue au second.*

Soient $\alpha\beta\gamma$, ABC (fig. 10) les deux triangles inscrits

Fig. 10.



homologues, XY la transversale qui coupe BC en P , CA en Q , AB en R . αP , βQ , γR rencontrent une seconde fois la conique aux points respectifs α' , β' , γ' .

Il faut démontrer que $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$ sont trois droites concourantes.

Donnons-nous comme fixes la conique, le triangle inscrit ABC , la transversale et par suite les points P , Q , R , et enfin les points de la conique α et α' alignés sur P .

Si l'on se donne β' sur la conique, la droite $Q\beta'$ donnera sur la conique un second point d'intersection β ; $B\beta$ donnera le point ω sur $A\alpha$; $C\omega$ donnera γ sur la conique, et enfin $R\gamma$ donnera γ' , d'où il suit qu'à chaque position de β' sur la conique correspond une position unique de γ' , et réciproquement. Donc $B\beta'$ et $C\gamma'$ se correspondent par homographie. Si l'on met β' en C , β vient en A , ω aussi, et par suite γ . Donc γ' vient en B . A la droite BC correspond donc la même droite CB . Donc le lieu du point ω' où se coupent $B\beta'$ et $C\gamma'$ est une droite. Si l'on met β' en A , β vient en C et ω en D sur BC . Donc γ vient en B et γ' en A , comme β' . Donc A fait partie du lieu. Il reste à démontrer que α' en fait aussi partie. Mettons β' en α' . β prend une certaine position β_1 sur la conique, et ω une certaine position ω_1 sur $A\alpha$; enfin $\omega_1 C$ donne γ_1 sur la conique. Il faut montrer que $R\gamma_1$ passe en α' . Il reviendra au même de joindre $\alpha'R$ pour obtenir γ_1 et de démontrer que $C\gamma_1$ passe par ω_1 , ou encore de prouver que les deux triangles $\alpha\beta_1\gamma_1$ et ABC sont homologues. Or cela résulte immédiatement de la réciproque du théorème IX, les points α , β_1 , γ_1 étant les seconds points d'intersection avec la conique des droites qui joignent α' aux points d'intersection des côtés du triangle ABC avec la droite PQR .

Remarque I. — Puisque le triangle ABC est homologue aux deux triangles $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, il résulte du

théorème XIX que la droite qui joint les deux centres d'homologie ω et ω' est la droite de Pascal de l'hexagone inscrit $\alpha\beta'\gamma\alpha'\beta\gamma'$.

Remarque II. — Si la droite XY est rejetée à l'infini, les droites $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ sont respectivement parallèles aux côtés du triangle ABC. Si de plus la conique est un cercle, on retrouve le théorème d'après lequel, si trois droites issues des sommets d'un triangle sont concourantes, les droites symétriques de celles-là par rapport aux trois bissectrices des angles du triangle sont aussi concourantes. En particulier, les symédianes sont concourantes. De plus :

La droite qui joint le centre de gravité d'un triangle au point de concours des symédianes passe par les points d'intersection respectifs des droites $\beta\gamma'$ et $\gamma\beta'$, $\gamma\alpha'$ et $\alpha\gamma'$, $\alpha\beta'$ et $\beta\alpha'$, si α , β , γ , α' , β' , γ' sont les seconds points d'intersection avec le cercle circonscrit des médianes et des symédianes.

Si les trois premières droites concourantes sont les hauteurs d'un triangle, les trois autres passent par le centre du cercle circonscrit. Si donc on désigne par α , β , γ les seconds points d'intersection des hauteurs avec le cercle circonscrit, et par A' , B' , C' les points du cercle circonscrit diamétralement opposés aux sommets du triangle, la droite qui joint l'orthocentre au centre du cercle circonscrit passe par les intersections respectives des droites $B'\gamma$ et $C'\beta$, $C'\alpha$ et $A'\gamma$, $A'\beta$ et $B'\alpha$. On sait que cette droite passe aussi par le centre de gravité et le centre du cercle des neuf points du triangle. Nous la retrouverons plus loin.

THÉORÈME XXVI (corrélatif du précédent). — *Étant donnés deux triangles homologiques circonscrits à une même conique, on mène par les sommets de*

l'un trois droites concourantes et, par les points où ces droites rencontrent les côtés correspondants de l'autre, trois nouvelles tangentes à la conique. Ces trois tangentes à la conique forment un triangle homologique au premier.

La réciproque du théorème XXV consiste en ce que tout triangle ABC inscrit dans la conique et homologique à la fois à deux autres triangles $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ inscrits dans la même conique l'est aussi au triangle formé par les droites $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$. Il est aisé de démontrer par l'absurde que ces droites coupent les côtés correspondants du triangle ABC en trois points en ligne droite. On peut aller plus loin et, en appliquant le théorème XIX, formuler la proposition générale :

THÉORÈME XXVII. — *Si les côtés d'un triangle UVW coupent une conique, savoir : VW en α et α' ; WU en β et β' ; UV en γ et γ' , tout triangle ABC inscrit dans la conique et homologique à deux des triangles $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, UVW l'est aussi au troisième, et les centres d'homologie du triangle ABC avec $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma'$ sont sur la droite de Pascal relative à l'hexagone inscrit $\alpha\beta'\gamma\alpha'\beta\gamma'$ (1).*

Remarque. — Si l'on suppose le triangle UVW circonscrit à la conique, on retrouve le théorème XVI que, à cause de son importance et de sa simplicité relative, j'ai cru devoir démontrer directement.

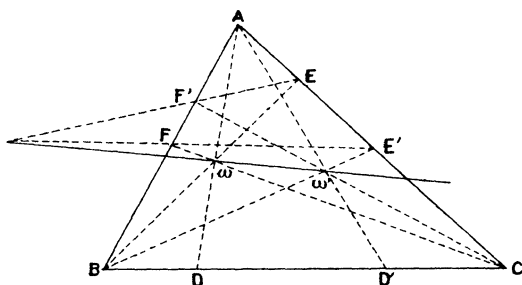
THÉORÈME XXVIII. — *Les pieds de deux systèmes*

(1) C'est ce théorème, que j'avais démontré d'une manière différente, qui m'a servi à démontrer géométriquement un théorème remarquable de M. Bricard relatif aux cycles tangents aux côtés des deux triangles conjugués (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, avril 1908).

de droites concourantes issues des trois sommets d'un triangle appartiennent à une même conique.

Soient en effet, dans le triangle ABC (*fig. 11*), les droites AD, BE, CF qui concourent en ω , et les droites

Fig. 11.



AD', BE', CF' qui concourent en ω' . Je considère l'hexagone $EF'CFE'B$ inscrit dans l'angle BAC . A cause du théorème de Pascal, l'intersection des côtés EF' et FE' se trouve sur la droite qui joint ω' , intersection de $F'C$ et $E'B$ à ω , intersection de CF et BF . On verrait de même que FD' et DF' d'une part, DE' et ED' d'autre part, se coupent aussi sur la droite $\omega\omega'$, d'où il suit que l'hexagone $DE'FD'EF'$ est inscrit dans une conique. C. Q. F. D.

Réciproquement, toute conique qui passe par les pieds de trois droites concourantes issues des sommets d'un triangle coupe les côtés de ce triangle en trois autres points qui, joints aux sommets opposés, donnent encore trois droites concourantes.

Remarque I. — Considérons le faisceau des coniques qui passent par les quatre points A, B, C, ω , et la polaire $X'Y'$ du point ω' par rapport au triangle ABC . Soit D' le point où $X'Y'$ rencontre BC . Le lieu des

pôles de $X'Y'$ par rapport à chacune des coniques du faisceau est une conique qui passe d'abord par les points D, E, F , centres des trois systèmes de deux droites du faisceau. De plus, ce lieu doit couper BC au point D' conjugué de D' par rapport à BC , car D' est le seul point de BC qui puisse être le pôle de $X'Y'$ par rapport à une conique proprement dite passant par B et C . De même, ce lieu passe aussi par E' et F' , ce qui fournit une nouvelle démonstration de notre théorème. De plus, pour la même raison, les seconds points d'intersection de la conique avec les droites AD, BE, CF sont conjugués par rapport à $A\omega, B\omega, C\omega$ des points où chacune de ces droites rencontre $X'Y'$. De même enfin, les seconds points d'intersection de la conique avec les droites AD', BE', CF' sont conjugués respectivement par rapport à $A\omega', B\omega', C\omega'$ des points où ces trois droites rencontrent la polaire XY de ω par rapport au triangle ABC . Pour cette raison nous appellerons cette conique *la conique des douze points*.

Si, en particulier, l'un des systèmes de trois droites concourantes est composé des médianes, la droite XY correspondante est rejetée à l'infini, et l'on obtient la proposition suivante :

Toute conique qui passe par les milieux des côtés d'un triangle coupe ces côtés en trois autres points qui, joints aux sommets opposés, donnent trois droites concourantes, et la conique passe par les milieux des segments compris sur chacune de ces trois droites entre leur point de concours et les sommets du triangle.

Remarque II. — Si l'on se rappelle que la droite $\omega\omega'$ est la droite de Pascal relative à l'hexagone $DE'FD'EF'$ et qu'on se reporte au théorème XIX, ou plutôt à sa

réci-proque, et aussi au théorème XXVII, on verra que :

Si l'on joint les trois points D, E, F ou D', E', F' à un point quelconque de la droite $\omega\omega'$, les trois droites ainsi obtenues coupent la conique des douze points en trois nouveaux points qui sont les sommets d'un triangle homologique aux deux triangles $DEF, D'E'F'$ et aussi au triangle ABC .

Ajoutons que tout triangle inscrit dans la conique des douze points et homologique à deux des triangles $ABC, DEF, D'E'F'$ est aussi homologique au troisième, et que les centres d'homologie avec DEF et $D'E'F'$ sont sur la droite $\omega\omega'$.

Remarque III. — Si l'on applique ces conclusions au cercle des neuf points, on obtient les résultats suivants :

1° Il existe une conique qui passe par les milieux des côtés d'un triangle, les pieds des hauteurs, les milieux des segments compris entre l'orthocentre et les sommets du triangle, et les trois points qui, sur chaque médiane, sont conjugués, par rapport au sommet et au centre de gravité, du point où cette médiane coupe la polaire de l'orthocentre par rapport au triangle.

2° Les droites qui joignent le milieu de chacun des segments compris entre un sommet et l'orthocentre au milieu du côté opposé concourent sur la droite qui joint le centre de gravité à l'orthocentre, parce que ces trois milieux sont les sommets d'un triangle homologique à la fois au triangle donné et au triangle formé par les pieds des hauteurs, d'où il suit qu'il est aussi homologique au triangle formé par les pieds des médianes. On reconnaît aisément que chacune de ces droites est la diagonale commune de deux rectangles inscrits. Donc la conique est un cercle qui a pour centre

le point de concours de ces diagonales. C'est le cercle connu sous le nom de *cercle des neuf points*. Donc le centre du cercle des neuf points est en ligne droite avec l'orthocentre et le centre de gravité. Nous appellerons cette droite *le diamètre principal du cercle des neuf points*.

3° Les droites qui joignent chacun des pieds des hauteurs au second point d'intersection de la médiane avec le cercle des neuf points concourent sur le diamètre principal.

4° Les points du cercle des neuf points M' , N' , P' diamétralement opposés aux pieds des hauteurs forment un triangle homologique au triangle donné et aussi au triangle des pieds des médianes MNP . Mais les pieds des médianes sont diamétralement opposés aux seconds points d'intersection des hauteurs avec le cercle des neuf points. Donc les droites MM' , NN' , PP' sont parallèles aux hauteurs et passent par le centre du cercle circonscrit au triangle. Donc le centre du cercle circonscrit est sur le diamètre principal du cercle des neuf points.

5° Si l'on joint soit les pieds des hauteurs, soit les pieds des médianes à un point quelconque du diamètre principal, les seconds points d'intersection de ces trois droites avec le cercle des neuf points forment un triangle homologique au triangle donné, au triangle des pieds des hauteurs, et à celui des pieds des médianes.

Rappelons enfin que, comme conséquence du théorème XXV, nous avons trouvé encore trois points qui sont sur le diamètre principal des cercles des neuf points.

THÉORÈME XXIX (corrélatif du précédent.) — Si D , E , F ; D' , E' , F' sont deux systèmes de trois points en

ligne droite sur les trois côtés d'un triangle ABC, les six droites AD, BE, CF, AD', BE', CF' sont tangentes à une même conique.

Réciproquement, D, E, F étant trois points en ligne droite sur les côtés d'un triangle ABC, traçons une conique tangente aux trois droites AD, BE, CF. Les secondes tangentes menées à cette conique des sommets du triangle coupent les côtés opposés en trois points en ligne droite.

On peut encore modifier l'énoncé de la manière suivante :

Soient un triangle PQR circonscrit à une conique et trois droites concourantes issues des sommets qui coupent les côtés opposés en A, B, C. Les secondes tangentes à la conique, issues de A, B, C, forment un triangle homologique au triangle ABC.

En effet, les trois tangentes QR, RP, PQ coupent les côtés du triangle ABC en trois points en ligne droite, puisque les deux triangles PQR et ABC sont homologiques par hypothèse. Alors on retombe sur la proposition précédente.