Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 9 (1909), p. 186-191

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__186_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2097.

(1908, p. 384.)

Étant donnés, dans un plan, un cercle et un point H, *on considère tous les triangles qui ont pour orthocentre le point* H *et dont un côté est un diamètre* MM′ *du cercle :*

1° *Trouver le lieu du troisième sommet* P.

2° *Trouver l'enveloppe* (E) *des droites* PM, PM′. *Les points de contact de ces droites avec l'enveloppe étant* N *et* N′, *faire voir que la droite* NN′ *passe en* H *et est parallèle à* MM′.

3° *Le cercle circonscrit au triangle* PMM′ *passe par deux points fixes ; il en est de même du cercle des neuf points. Les pieds des hauteurs du triangle* PMM′ *étant* K *sur* MM′, I *sur* PM, I′ *sur* PM′, *la droite* II′ *passe par un point fixe.*

4° *La conique de foyer* H *inscrite au triangle* PMM′ *est tangente à deux droites fixes ; son petit axe a une longueur constante.*

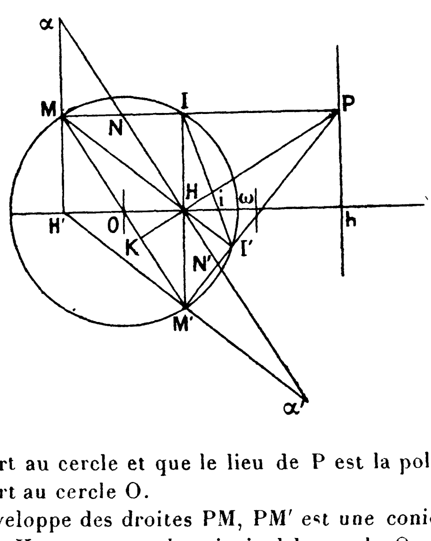
On désignera par a le rayon du cercle donné, par c la distance du point H *au centre* O *du cercle.*

(G. Fontené.)

SOLUTION

Par M. G. Pélissier.

1° Les points I et I′ sont sur le cercle O ; la figure montre alors immédiatement que les points H et P sont conjugués



par rapport au cercle et que le lieu de P est la polaire de H, par rapport au cercle O.

2° L'enveloppe des droites PM, PM′ est une conique ayant pour foyer H et pour cercle principal le cercle O. Soit H′ le symétrique de H par rapport au point O : la parallèle à MM′ menée par H rencontre H′M et H′M′ en des points α et α' tels que

$$H'M = M\alpha, \qquad H'M' = M'\alpha'.$$

Les points N et N′ où la droite $\alpha\alpha'$ rencontre respectivement PM et PM′ sont donc les points de contact de ces droites avec leur enveloppe (E).

3° L'angle $\widehat{MH'M'}$ étant égal à l'angle $\widehat{MHM'}$, le quadrilatère H′MPM′ est inscriptible et le cercle PMM′ passe par le point fixe H′. Il passe aussi par le point h, pied de la polaire de H, puisque l'angle $\widehat{PhH'}$ est droit; on a

$$\mathrm{OH}.\mathrm{O}h = a^2.$$

Le cercle des neuf points qui est l'homothétique par rapport à H et dans le rapport $\frac{1}{2}$ du cercle PMM′ passe par le point O et le milieu ω de Hh : on a d'ailleurs

$$\mathrm{O}\omega = \frac{1}{2}\,\frac{a^2+c^2}{c}.$$

Soit i le point de rencontre de II′ et de OH ; ce point a même puissance par rapport au cercle O et au cercle des neuf points du triangle PMM′ qui passe en I et I′. On a donc

$$\overline{\mathrm{O}i}^2 - a^2 = \overline{i\mathrm{O}}\ \overline{i\omega} = \overline{i\mathrm{O}}(\overline{\mathrm{O}\omega} + \overline{i\mathrm{O}}),$$

d'où

$$\mathrm{O}i = \frac{a^2}{\mathrm{O}\omega} = \frac{2a^2c}{a^2+c^2}.$$

Le point i est donc fixe ; c'est le pied de la polaire de ω par rapport au cercle O.

4° La conique de foyer H inscrite au triangle PMM′ a pour cercle principal le cercle des neuf points de ce triangle : elle admet deux tangentes fixes parallèles qui sont les perpendiculaires en O et ω à OH ; le carré du petit axe β de cette conique est égal au produit des distances de H à ces deux tangentes, c'est-à-dire

$$\mathrm{OH}.\mathrm{H}\omega = \frac{a^2-c^2}{2};$$

il est donc constant.

Autres solutions par MM. R. Bouvaist, C. Faraggi, P. Favre, P. Sondat, M. Tétu, A. Vacquant,

2101.

(1908, p. 478.)

La quintique gauche qui est l'intersection partielle d'une quadrique et d'une surface du troisième ordre et ayant une droite commune dépend de 20 *paramètres.* (G. F.)

SOLUTION

Par M. Jan de Mézéas.

Soient C la quintique gauche considérée, S_2 et S_3 les surfaces, respectivement du deuxième et du troisième ordre, dont elle est l'intersection partielle, D la droite qui complète cette intersection. Désignons par λ et μ les paramètres dont dépendent d'une manière univoque les génératrices de S_2, λ étant relatif aux génératrices du même système que D, μ aux génératrices de l'autre système. Cherchons la forme de la relation

$$f(\lambda, \mu) = 0$$

qui relie les paramètres de deux génératrices de S_2 se coupant en un point de C.

Toutes les génératrices du même système que D rencontrent S_3 en trois points dont aucun n'appartient à D. Ces trois points appartiennent donc à C.

Toutes les génératrices du système opposé à D rencontrent S_3 en trois points, dont l'un appartient à D et les deux autres à C.

Il résulte de là que la relation (1) est telle qu'à une valeur de λ correspondent trois valeurs de μ, et à une valeur de μ, deux valeurs de λ. Cette relation est donc de la forme

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0,$$

A, B, C étant des polynomes du troisième degré en μ. Cette relation contient donc $3.4 - 1 = 11$ paramètres.

Pour définir la quintique C, il faut se donner la quadrique S_2, qui est évidemment unique pour une quintique donnée, et la relation (1), en tout $9 + 11 = 20$ paramètres.

2102.

(1908, p 479.)

On considère un limaçon de Pascal et les cercles bitangents n'ayant pas leurs centres sur l'axe de symétrie :

1° *La corde de contact passe par un point fixe* P.

2° *Enveloppe de la polaire de ce point par rapport à un cercle bitangent.*

3° *Lieu du pôle de la corde de contact par rapport à un cercle bitangent.*

4° *Lieu du milieu de cette corde.*

5° *Lieu du conjugué harmonique de* P *par rapport aux points de contact du cercle avec le limaçon.*

(M. Têtu.)

SOLUTION

Par M. Clapier.

Soient O et A les foyers d'une conique situés à la distance d; désignons par R le grand axe. Si nous faisons une inversion en prenant A pour pôle et $R^2 - d^2$ pour puissance d'inversion, la conique devient un limaçon de Pascal ayant A pour point double. Aux cercles bitangents ayant leur centre sur l'axe normal à l'axe de symétrie OA, correspondent des cercles bitangents au limaçon ayant leurs centres sur la circonférence (O) de centre O et de rayon d; ces derniers cercles seront orthogonaux à la circonférence (P) inverse de l'axe de la conique, dont le rayon est PA ; son centre P est à la distance

$$OP = \frac{R^2}{d}.$$

Inversement, tout limaçon de Pascal peut être défini en coordonnées polaires par l'équation

$$\rho = 2d\cos\theta \pm R;$$

il est l'inverse d'une conique admettant le point double A pour foyer et pour excentricité $\frac{d}{R}$. Il peut donc être défini comme enveloppe de cercles bitangents (K) dont le centre décrit une circonférence donnée (O) et qui sont orthogonaux à une circonférence fixe (P) tangente à la première au point A.

1° La corde des contacts MM′ de l'un de ces cercles bitangents passe par le point fixe P, foyer simple du limaçon.

4° Le milieu μ de MM′ appartient à la podaire du centre P par rapport à la circonférence (O); il décrit donc un limaçon.

5° Soit μ' le conjugué harmonique de P par rapport à M et M′; nous avons

$$\frac{2}{P\mu'} = \frac{1}{PM} + \frac{1}{PM'} = \frac{2P\mu}{\overline{PA}^2};$$

donc le lieu de ce point μ' est l'inverse du limaçon précédent, c'est une conique de foyer P tangente en A aux circonférences données.

2° La polaire au point P par rapport au cercle bitangent n'est autre que l'axe radical de ce cercle avec la circonférence (P); elle passe par μ' et touche en ce point la conique précédemment trouvée; celle-ci est donc l'enveloppe demandée.

3° Enfin le pôle I de la corde des contacts est tel que le cercle circonscrit au triangle IMM′ est orthogonal aux circonférences (O) et (P); le centre de ce cercle est donc sur la tangente commune AΔ à ces circonférences. Il en résulte que l'angle $\widehat{KAI}$ est droit et que le lieu du point I est l'homothétique double par rapport au point A d'une courbe qui est la podaire d'une parabole de foyer O et tangente à O; c'est une cissoïde admettant A pour point de rebroussement.

Autres solutions par MM. E.-N. Barisien, R. Bouvaist, G. Pélissier, V. Retali.