Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 9 (1909), p. 136-140

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__136_0>

CORRESPONDANCE.

M. **H. Brocard.** — Le très intéressant article de M. Deteuf : *Sur un point particulier du quadrilatère inscriptible* (1908, p. 442-448), n'est pas absolument nouveau. Les droites 3°, 5° et les quatre cercles désignés après le paragraphe 7° ont été déjà indiqués (*Mathesis*, 1901, p. 25-26) par M. Mathot, qui a également observé que ce point est le symétrique du centre O par rapport au point I milieu de la droite qui joint les milieux des diagonales.

M. J. Neuberg (*loc. cit.*) a rappelé que les propriétés signalées dans cette Note étaient connues, du moins en partie.

Le lecteur, en effet, ne sera pas étonné d'apprendre que le point commun à quatre droites de Simson et aux quatre cercles d'Euler a été indiqué par M. E. Lemoine dans le présent journal (1869, question **908**, p. 47), résolue avec figures, pages 174 et 317 (C.-A. Laisant, *Problèmes*, t. IV, p. 16-17).

M. **Lebesgue.** — A l'occasion de l'article de M. G. Lery (*Nouvelles Annales*, août 1908), je ferai une remarque, rapidement car elle n'est pas nouvelle et que je l'ai développée dans un petit article que doit publier la *Revue de l'Enseignement des Sciences* [1].

[1] Cet article a été écrit à l'occasion de travaux de M. Montel et de M. Thybaut publiés par la *Revue de l'Enseignement des Sciences*. M. G. Mouthon et d'autres auteurs ont adressé à cette occasion au Directeur de la *Revue* des remarques analogues à celle dont il s'agit ici.

Quand on raisonne comme le fait M. Lery, on prouve que, si les six conditions classiques d'équilibre sont remplies pendant un certain temps pour la position initiale du solide *et pour toutes les positions voisines,* il y a équilibre pendant le temps considéré, si les vitesses initiales sont nulles. On étudie ainsi un équilibre en un certain sens indifférent, mais on ne démontre pas que les six conditions d'équilibre, telles qu'on les comprend ordinairement, sont suffisantes et les conditions qu'on démontre être suffisantes ne sont, bien entendu, nullement nécessaires.

Si l'on suppose seulement, comme on prétend généralement le faire, que les vitesses initiales sont nulles et les conditions d'équilibre remplies pour la position initiale, les six équations du mouvement du solide, d'où tout doit se déduire, montrent seulement que les accélérations initiales sont nulles; mais il est des cas où ces équations fournissent d'autres solutions que le repos. Par exemple ce serait le cas pour un solide réduit à un point placé, sans vitesse initiale, à l'origine des coordonnées dans le champ de forces

$$X = \sqrt[3]{x}, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0.$$

Si donc on veut à toute force que les conditions indiquées soient suffisantes pour l'équilibre, il faut faire cet acte de foi : il n'y a pas de mouvement dans lequel la vitesse et l'accélération s'annulent en même temps (1).

(1) Aux objections précédentes, on m'a répondu aussi : « Nous n'étudions en Mécanique que les cas où les équations du mouvement admettent des solutions déterminées d'une façon unique par les conditions initiales. Dès lors, pour les conditions indiquées, puisque le repos répond à la question, c'est la seule solution. »

Il suffit, pour répondre à cela et faire voir qu'on ne fait que déplacer la difficulté, de remarquer qu'on doit alors adopter l'énoncé quand les six conditions d'équilibre sont remplies et quand les équa-

C'est ce qu'on admet quand on construit la Statique avant la Dynamique, et l'on dit souvent alors que l'hypothèse n'est pas nouvelle, qu'elle est une conséquence de la définition newtonienne de la force : la force est la cause du mouvement ou des modifications du mouvement.

Il est généralement admis maintenant qu'on peut, sans manquer de respect à la mémoire de Newton, trouver cette définition peu claire ; mais ce qui est moins clair encore, c'est la conséquence indiquée qu'on en prétend tirer, car il me semble qu'on ne peut le faire sans nier aussi tout mouvement, autre que le mouvement uniforme, dans lequel l'accélération s'annule à un instant. Or, voyons les conséquences de cela.

Après avoir traité comme à l'ordinaire un problème de Mécanique, il nous faudra en reviser soigneusement la solution ; nous rechercherons si cette solution ne nous conduit pas à attribuer à un point matériel un mouvement dans lequel l'accélération s'annule à un instant et, si cela est, nous rejeterons la solution. C'est-à-dire que, si cette solution est l'unique solution mathématique, on affirmera que les données du problème (champ de forces et conditions initiales) sont incompatibles. Par exemple, on ne peut placer sans vitesse initiale un point matériel dans un champ de forces centrales attractives proportionnelles à la distance, puisque aucun mouvement matériel ne pourrait être un mouvement oscillatoire simple.

Par exemple encore, bien qu'un théorème de Kempe et Kœnigs nous apprenne à construire un système articulé dont deux sommets A et B décrivent Ox de façon

---

tions du mouvement admettent des solutions bien déterminées, il y a repos si les vitesses initiales sont nulles.

que leurs abscisses soient liées par la relation

$$x_A = (x_B)^3,$$

nous devons admettre que cet ensemble de barres n'est pas réalisable ou qu'il est impossible de donner à son sommet B un mouvement rectiligne et uniforme sur Ox dans lequel B passe en O ([1]).

Mais il faut bien admettre que ces mouvements que l'on déclare impossibles, que ces conditions que l'on dit incompatibles sont réalisables d'une façon si approchée que nous n'apercevons aucune différence entre les mouvements et conditions exactement réalisés et ceux, impossibles, que nous leur avions substitués.

Nous voilà donc arrivé à cette chinoiserie : la Mécanique rationnelle conduit parfois à des solutions inacceptables ; mais ces solutions, quand elles sont uniques, sont *toujours* d'accord avec l'expérience et, quand elles ne sont pas uniques, il se peut que des conditions initiales très voisines de celles supposées, et pratiquement indiscernables de celles-ci, conduisent à des résultats pratiquement indiscernables de ceux que nous avons rejetés.

Ne serait-il pas plus franc, puisque le résultat pratique est le même, de ne rejeter aucune solution et d'avouer qu'il est des cas où la Mécanique rationnelle ne suffit pas pour nous apprendre ce qui se passe. D'ailleurs, même dans ces cas, la résolution analytique du problème n'est pas inutile, car elle nous enseigne quels sont, dans la multitude des mouvements imaginables, ceux entre lesquels il nous faut choisir en utilisant les résultats fournis par l'observation ou l'expérience.

([1]) Ici on utilise seulement l'inexistence d'un mouvement dans lequel la vitesse et l'accélération s'annulent à la fois.

Il me semble que, dès les classes de Mathématiques spéciales, on pourrait démontrer que les six conditions classiques sont nécessaires pour l'équilibre (ce qu'on fait) et que, si un système est placé sans vitesses initiales dans une position telle que tout déplacement imaginable à partir de la position initiale corresponde pendant un certain temps à un travail négatif ou nul des forces, il est en équilibre. Cette conséquence du théorème des forces vives fournit une méthode régulière et facile pour l'étude des machines simples. De plus, grâce à elle, on peut se passer de la théorie ordinaire des systèmes équivalents de vecteurs,

Si l'on s'adresse à des élèves connaissant la théorie des équations différentielles, on pourra leur faire remarquer que les six conditions d'équilibre sont suffisantes toutes les fois que, pour les conditions initiales indiquées, la solution des équations différentielles du mouvement est unique, et le théorème signalé plus haut apparaîtra alors comme délimitant un cas particulièrement simple dans lequel la solution est déterminée.

M. J. **Rose**. — Dans le numéro de novembre 1908 des *Nouvelles Annales* (p. 504), M. Têtu indique une construction du centre de courbure en un point M d'une ellipse. J'ai donné cette construction ainsi que de nombreuses autres dans *Mathesis* (1903, p. 90) par la considération des propriétés de l'hexagone de Pascal.

M. **Retali**. — La question 2104 est identique à la question 667 posée par Catalan dans le Tome II des *Nouvelles Annales* (1863, p. 372).

La question 2106 est celle que j'ai posée sous le n° 751 dans le *Periodico di Matematico* (t. XXIII, 1908, p. 286).