

BARRÉ

**Étude sur les enveloppes de courbes
à un paramètre**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 9
(1909), p. 101-125

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__101_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1909, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[O'3gγ]

**ÉTUDE SUR LES ENVELOPPES DE COURBES
A UN PARAMÈTRE;**

PAR M. BARRÉ,
Capitaine du Génie.

I. *Considérations préliminaires.* — Conformément à leur signification géométrique la plus naturelle, nous définirons dans cette étude une enveloppe de courbes dépendant d'un paramètre comme une courbe fixe à laquelle restent constamment tangentes les courbes mobiles (enveloppées). Il est à remarquer que ce point de vue, adopté en général par les auteurs classiques pour les courbes gauches, ne l'est pas pour les courbes planes et les surfaces. On considère alors, en général ⁽¹⁾, l'enveloppe comme un lieu de points (ou de courbes) caractéristiques. On montre bien que ce lieu est une enveloppe au premier sens du mot, mais on omet de prouver la réciproque, à savoir que toute cette enveloppe a bien été déterminée ainsi. Dans ce qui suit, nous démontrerons, pour les courbes à un paramètre, l'équivalence des deux définitions et nous établirons que les coordonnées des points de l'enveloppe peuvent, en général, s'exprimer par des fonctions continues et dérivables du paramètre dont dépend l'enveloppée. Ce fait est admis par tous les Traités que nous avons pu voir et qui définissent l'enveloppe par la propriété de tangence. Il n'est nullement évident et nous aurons l'occasion, au cours de ce Mémoire, de rencontrer des cas où cette

⁽¹⁾ M. Goursat, dans son *Cours d'Analyse*, conserve uniformément le premier point de vue.

hypothèse cesse d'être vérifiée. Leur considération nous conduira même à des propriétés relatives aux singularités que présente le problème des enveloppes de courbes à un paramètre.

II. *Recherche de l'enveloppe.* — Soient

$$(1) \quad \begin{cases} f_1(x, y, z, \alpha) = 0, \\ f_2(x, y, z', \alpha) = 0 \end{cases}$$

les équations (dont nous supposons les premiers membres analytiques par rapport aux quatre variables qui y figurent) de l'enveloppée.

Si l'enveloppe existe, elle peut être représentée par des équations

$$(2) \quad x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t),$$

dans lesquelles f , φ et ψ sont des fonctions analytiques du paramètre t , sauf peut-être pour des valeurs isolées.

Soit alors $t = t_0$ la valeur du paramètre correspondant à un point ordinaire M_0 de l'enveloppe (E). Les conditions nécessaires et suffisantes pour que (E) touche en M_0 une certaine enveloppée (C₀), correspondant à la valeur α_0 du paramètre α , sont

$$(3) \quad \begin{cases} f_1[f(t_0), \varphi(t_0), \psi(t_0), \alpha_0] = 0, \\ f_2[f(t_0), \varphi(t_0), \psi(t_0), \alpha_0] = 0; \end{cases}$$

et, en posant

$$f' = \frac{df}{dt}, \dots,$$

on a également

$$(4) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} f' + \frac{\partial f_1}{\partial y} \varphi' + \frac{\partial f_1}{\partial z} \psi' \right)_{\substack{t=t_0 \\ \alpha=\alpha_0}} = 0, \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} f' + \frac{\partial f_2}{\partial y} \varphi' + \frac{\partial f_2}{\partial z} \psi' \right)_{\substack{t=t_0 \\ \alpha=\alpha_0}} = 0, \end{cases}$$

en désignant par $[F]_{t=\frac{t_0}{a=a_0}}$ la valeur que prend une fonction $F(t, a)$ pour $t = t_0$ et $a = a_0$.

Si l'on fait varier le point M_0 il en sera de même de la courbe C_0 ; autrement dit, lorsque nous ferons varier t il en sera de même de la valeur de a correspondante.

Je dis que pour chaque système de valeur de a et de t correspondantes on doit avoir

$$(5) \quad \frac{\partial f_1}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial a} = 0.$$

En effet, s'il n'en était pas ainsi, la succession des valeurs de a correspondant aux diverses valeurs de t formerait une fonction de t analytique dans les environs du point considéré : $a = \lambda(t)$ qu'on pourrait tirer de celle des deux équations (1) dont la dérivée par rapport à a ne serait pas nulle.

Cette fonction devrait satisfaire aux deux équations

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x} f' + \frac{\partial f_1}{\partial y} \varphi' + \frac{\partial f_1}{\partial z} \psi' + \frac{\partial f_1}{\partial a} \lambda' = 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} f' + \frac{\partial f_2}{\partial y} \varphi' + \frac{\partial f_2}{\partial z} \psi' + \frac{\partial f_2}{\partial a} \lambda' = 0. \end{cases}$$

Mais, d'autre part, pour un système de valeurs correspondantes *quelconques* (a_0, t_0) les équations (4) doivent être vérifiées. Il devrait en être de même des équations obtenues en remplaçant dans les relations (6) les variables a et t par un tel système, ce qui exige que les dérivées $\frac{\partial f_1}{\partial a}$ et $\frac{\partial f_2}{\partial a}$ s'annulent pour $a = a_0$ et $t = t_0$. Comme t_0 et a_0 sont d'ailleurs quelconques il y a contradiction avec l'hypothèse faite que la fonction $\lambda(t)$ ne satisfaisait pas aux deux équations (5).

Les coordonnées x, y, z du point de contact de l'enveloppe et de l'enveloppée doivent donc vérifier les

quatre équations

$$(7) \quad \begin{cases} f_1(x, y, z, \alpha) = 0, & f_2(x, y, z, \alpha) = 0, \\ \frac{\partial f_1}{\partial \alpha}(x, y, z, \alpha) = 0, & \frac{\partial f_2}{\partial \alpha}(x, y, z, \alpha) = 0. \end{cases}$$

Ces équations déterminent en général des points isolés. Si elles se réduisent à trois, elles définissent x , y et z comme des fonctions analytiques de α , sauf exception possible pour les points dont les coordonnées vérifieraient en outre les deux équations

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_1 \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \end{vmatrix} = 0, \\ \Delta_2 \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{vmatrix} = 0. \end{array} \right.$$

Ces nouvelles équations ne pourraient qu'exceptionnellement, même en des points isolés, être vérifiées en même temps que les trois équations auxquelles se réduirait le système (7).

Si donc l'enveloppe existe, les coordonnées de son point de contact avec l'enveloppée sont des fonctions analytiques du paramètre α dont dépend celle-ci :

Inversement, s'il existe trois fonctions analytiques

$$(9) \quad x = f(\alpha), \quad y = \varphi(\alpha), \quad z = \psi(\alpha),$$

satisfaisant aux quatre équations (7), la courbe (E) représentée par les équations (8) est une enveloppe des

courbes (C). En effet, en différentiant les équations (8), on obtient sur la courbe (E) les différentielles

$$\delta x = f'(a) da, \quad \delta y = \varphi'_a(a) da, \quad \delta z = \psi'(a) da,$$

qui satisfont aux équations suivantes tirées de la différentiation des deux premières équations (7),

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_1}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_1}{\partial z} \delta z + \frac{\partial f_1}{\partial a} da &= 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_2}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_2}{\partial z} \delta z + \frac{\partial f_2}{\partial a} da &= 0, \end{aligned}$$

lesquelles se réduisent, en vertu des deux dernières équations (7), aux suivantes :

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_1}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_1}{\partial z} \delta z = 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_2}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_2}{\partial z} \delta z = 0. \end{cases}$$

Le point défini par les formules (9) appartient évidemment à la courbe (C) de paramètre a en vertu des deux premières équations (7) auxquelles satisfont identiquement f , φ et ψ . D'autre part, les équations (10) qui définissent δx , δy , δz ne diffèrent pas de celles qui définissent dx , dy , dz différentielles des coordonnées de l'enveloppée (7).

La courbe (E) touche donc la courbe (C) au point (x, y, z, a) .

Cas de dégénérescence de l'enveloppe. — Il peut arriver que les fonctions f , φ et ψ se réduisent à trois constantes x_1, y_1, z_1 . Les équations (6) seraient alors vérifiées pour $x = x_1, y = y_1, z = z_1$, quelle que soit la valeur de a . Dans ce cas, la courbe mobile c passerait constamment par le point fixe (x_1, y_1, z_1) qui pourrait être considéré comme appartenant à l'enveloppe.

Inversement, si une courbe mobile passe par un point fixe, celui-ci peut être considéré comme constituant une enveloppe de la courbe.

Nous laisserons au lecteur le soin de faire cette vérification consistant à exprimer que les quatre équations (7) sont vérifiées quel que soit α pour

$$x = x_1, \quad y = y_1, \quad z = z_1.$$

Il se peut d'ailleurs qu'il y ait ou qu'il n'y ait pas de véritable enveloppe.

EN RÉSUMÉ : 1° Une courbe variable de l'espace appartenant à une famille à un paramètre n'a pas, en général, d'enveloppe.

2° S'il existe un ensemble de trois fonctions analytiques $f(\alpha)$, $\varphi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$ qui, substituées respectivement à x , y et z , dans les équations (7), satisfont à celles-ci, la courbe mobile (C) admet pour enveloppe la courbe représentée par les équations

$$x = f(\alpha), \quad y = \varphi(\alpha), \quad z = \psi(\alpha).$$

Ces conclusions supposent que le point considéré n'est singulier ni sur la courbe mobile ni sur la courbe enveloppe, car nos calculs comportent en effet cette restriction (1).

(1) La présence sur l'enveloppe d'un point singulier de l'enveloppée serait d'ailleurs exceptionnelle, car il correspondrait à la vérification des deux conditions nouvelles

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial z}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial z}$$

qui se traduisent [après substitution $x = f(\alpha)$, $y = \varphi(\alpha)$, $z = \psi(\alpha)$] par deux équations pour déterminer une valeur de α .

3° Quand l'enveloppe existe, elle peut s'obtenir sous la forme

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0,$$

en éliminant a de deux façons entre les équations (7).

Toutefois, l'emploi de cette méthode, pour être correct, doit exiger quelques précautions sur lesquelles nous reviendrons plus loin.

THÉORÈME. — *Si les courbes d'une famille à un paramètre ont une enveloppe, deux de ces courbes infiniment voisines quelconques peuvent, aux infiniment petits d'ordre supérieur près, être considérées comme ayant un point commun au moins dont le lieu se confond avec l'enveloppe.*

Un calcul tout à fait classique montre que les points communs à deux courbes infiniment voisines d'une famille dépendant d'un paramètre variable a sont déterminées par les équations de la courbe

$$f_1(x, y, z, a) = 0, \quad f_2(x, y, z, a) = 0$$

jointes aux suivantes :

$$\frac{\partial f_1}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial a} = 0.$$

En général, il y aura un nombre limité ou tout au plus une infinité discontinue de courbes ayant un point commun avec la courbe infiniment voisine. Au contraire, dans le cas où il existe une enveloppe, à toute valeur de a correspond au moins un système de valeurs de x, y et z satisfaisant aux équations précédentes, c'est-à-dire un point commun à la courbe de paramètre (a) et à la courbe infiniment voisine.

RÉCIPROQUE. — *Si une courbe quelconque d'une*

famille à un paramètre possède avec la courbe infiniment voisine un point commun au moins, les courbes de la famille admettent une enveloppe. Celle-ci est confondue avec le lieu des points communs à deux courbes infiniment voisines.

Nous nous dispenserons de donner de cette réciproque la démonstration qui peut se calquer sur celle du théorème direct.

III. CAS PARTICULIER. — *La courbe est déterminée par une surface fixe $[F(x, y, z) = 0]$ et une surface mobile $[f(x, y, z, a) = 0]$.*

La courbe considérée admet en général une enveloppe, car les quatre équations (7) se réduisent dans ce cas aux trois suivantes :

$$(11) \quad F(x, y, z) = 0, \quad f(x, y, z, a) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a}(x, y, z, a) = 0.$$

La théorie des enveloppes planes rentre immédiatement dans ce cas. En prenant pour plan $z = 0$ le plan des courbes planes étudiées, celles-ci sont déterminées dans leur plan par deux équations de la forme

$$\mathcal{F}(x, y, a) = 0$$

et elles admettent une courbe enveloppe obtenue en cherchant le lieu des intersections des deux courbes

$$(12) \quad \mathcal{F}(x, y, a) = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a}(x, y, a) = 0.$$

Ces deux équations sont celles, bien connues, auxquelles conduit la théorie classique des enveloppes dans le plan.

La conclusion relative au cas d'une courbe quelconque, déterminée par une surface fixe et une surface

mobile, donne lieu à une remarque intéressante. En effet, une courbe mobile (C) quelconque, déterminée par l'intersection de deux surfaces mobiles (S_1) et (S_2) dépendant d'un paramètre, engendrera une surface fixe (S) dont l'équation cartésienne

$$(13) \quad \Phi(x, y, z) = 0$$

s'obtient en éliminant a entre les équations

$$(14) \quad f_1(x, y, z, a) = 0, \quad f_2(x, y, z, a) = 0,$$

des surfaces mobiles. Cette élimination se fera en tirant a en fonction de x, y et z de celle des équations (14) pour laquelle la dérivée partielle par rapport à a n'est pas nulle. Si par exemple $\frac{\partial f_2}{\partial a}$ est différent de zéro aux environs d'un système de valeur déterminée, nous tirerons de la seconde équation (14)

$$a = \lambda(x, y, z),$$

et, en portant dans la première équation (14), nous obtiendrons

$$(15) \quad \Phi \equiv f_1[x, y, z, \lambda(x, y, z)] = 0.$$

Mais, pour avoir l'enveloppe de la courbe considérée comme déterminée par la surface fixe (S) d'équation (15) et la surface mobile (S_2), nous devons joindre aux deux équations correspondantes

$$\Phi(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z, a) = 0$$

l'équation

$$\frac{\partial f_2}{\partial a}(x, y, z, a) = 0,$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse fondamen-

tale que nous avons faite au début ($\frac{\partial f_2}{\partial a} \neq 0$). Ceci explique le paradoxe apparent consistant en ce que toute courbe mobile, pouvant être considérée comme appartenant à une surface fixe et à une surface mobile, devrait avoir une enveloppe.

Si toutefois on fait le calcul qui vient d'être exposé, la fonction $\lambda(x, y, z)$ sera analytique en tout point n'annulant pas $\frac{\partial f_2}{\partial a}$. Il en sera de même de la fonction Φ obtenue tandis que le contraire se présentera pour les points pouvant appartenir à l'enveloppe de (C). Il peut d'ailleurs arriver [par exemple en rendant rationnelle l'équation (15) lorsque celle-ci se réduit à la somme d'un polynôme et d'un radical du second degré] qu'on puisse mettre l'équation (15) sous une forme dépourvue de singularités. Mais alors on a en général introduit des branches étrangères, lesquelles d'ailleurs peuvent avoir ou ne pas avoir d'enveloppe. Toutefois la courbe formée par l'ensemble de chaque courbe (C) et des branches étrangères correspondantes possédera en général une enveloppe.

THÉORÈME. — *Si une surface fixe (S) et une surface mobile (S₂) qui définissent une courbe appartenant à une famille à un paramètre sont constamment tangentes en un point de celle-ci, le lieu de ce point, en général point double ordinaire de (C), forme une branche singulière d'enveloppe pour la courbe (C).*

Il existe, comme conséquence de l'hypothèse, trois fonctions analytiques de a qui, substituées à x, y , et z dans les équations des surfaces (S) et (S₂)

$$(16) \quad F(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z, a) = 0$$

et dans les équations

$$(17) \quad \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f_2}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial f_2}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial f_2}{\partial z}},$$

les vérifient identiquement.

Si nous différencions les deux premières en y considérant x , y et z comme fonctions de α , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz &= 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} dx + \frac{\partial f_2}{\partial y} dy + \frac{\partial f_2}{\partial z} dz + \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} d\alpha &= 0. \end{aligned}$$

d'où l'on déduit, en tenant compte des équations (17),

$$\frac{\partial f_2}{\partial \alpha} = 0,$$

ce qui démontre le théorème.

IV. *Discussion des singularités que peut présenter la solution du problème des enveloppes de courbes à un paramètre.* — Lorsque l'enveloppe existe on peut, avons-nous dit, la représenter par deux équations

$$(18) \quad F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0,$$

obtenues en éliminant α entre les équations (7). Or nous allons voir que cette opération ne peut se faire qu'en tirant α de l'une des équations

$$\frac{\partial f_1}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} = 0,$$

et portant le résultat obtenu dans deux des trois autres.

L'enveloppe existant, la courbe ainsi définie dans le

domaine du point considéré appartiendra également à la surface représentée par celle des équations (7) dont il n'a pas été fait usage.

Nous reviendrons ci-après sur cette opération : nous nous bornerons ici à faire remarquer qu'on ne peut, pour obtenir a en fonction analytique des coordonnées x, y, z du point considéré, songer à utiliser l'une des deux premières équations (7), car précisément au point envisagé les dérivées partielles par rapport à a des fonctions f_1 et f_2 doivent être nulles. D'autre part, pour la même raison, nous ne sommes assurés de la légitimité de l'opération que nous venons de définir que si aux points considérés on n'a pas à la fois

$$(19) \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial a^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial a^2} = 0.$$

Il est d'ailleurs évident que la réalisation des égalités (19), même pour des points isolés de l'enveloppe, sera un fait exceptionnel en général et par suite aussi la difficulté qui en résulte. Toutefois elle se présentera normalement pour des points isolés de l'enveloppe lorsque la courbe mobile sera définie par une surface fixe et une surface mobile. Si les équations de ces dernières sont

$$F(x, y, z) = 0, \quad f_1(x, y, z, a) = 0,$$

les points de l'enveloppe présentant les particularités dont il s'agit seront déterminées par les quatre équations

$$(19 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} F(x, y, z) = 0, \quad f_1(x, y, z, a) = 0, \\ \frac{\partial f_1}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial a^2} = 0. \end{array} \right.$$

Ils pourront être en nombre fini ou infini, formant une succession de valeurs isolées de x, y, z, a . En

particulier, si F est un polynome de degré m en x , y et z et si f_1 est un polynome de degré n en x , y et z et de degré p en a , l'enveloppe présentera en général

$$m(n+p)(n+p-1)(n+p-2)$$

points possédant la particularité dont il s'agit.

Laissons pour le moment ces points et revenons au cas général.

L'une au moins des deux dérivées secondes n'est pas nulle. Supposons que ce soit $\frac{\partial^2 f_1}{\partial a^2}$.

De la troisième équation (7) nous pourrons tirer

$$(20) \quad a = \mu(x, y, z).$$

En portant cette expression de a dans les deux premières équations (7) on obtient les deux suivantes :

$$(21) \quad \begin{cases} f_1(x, y, z, \mu) \equiv F_1(x, y, z) = 0, \\ f_2(x, y, z, \mu) \equiv F_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Puisque nous supposons l'existence d'une enveloppe pour l'une au moins des déterminations de μ , la courbe représentée par les équations (21) forme une branche située entièrement, dans le domaine du point considéré, sur la surface dont l'équation est

$$(22) \quad \frac{\partial f_2}{\partial a}(x, y, z, \mu) = 0.$$

Inversement, si, par une détermination de μ , la branche de la courbe définie par les équations (21) est située sur la surface représentée par l'équation (22), je dis que cette branche est bien une enveloppe. En effet, dans ce cas, les équations (21) et (20) permettent de tirer x , y , z en fonction de a tant que le jacobien $\frac{D(F_1, F_2, \mu)}{D(x, y, z)}$ n'est pas nul ; les valeurs correspondantes

satisfaisant à l'équation (22), il existe bien trois fonctions $x(a)$, $y(a)$, $z(a)$ satisfaisant aux quatre équations (7). La branche de courbe considérée, représentée par ces fonctions, est bien une enveloppe de la courbe C. Un calcul simple montre que le jacobien $\frac{D(F_1, F_2, \mu)}{D(x, y, z)}$ se réduit simplement au déterminant Δ_1 . Si Δ_1 était nul on pourrait tirer x , y et z en fonction de a des équations (21) jointe à l'équation

$$\frac{\partial f_2}{\partial a} = 0;$$

les valeurs obtenues portées dans l'équation (20) y satisferaient identiquement. Une condition de légitimité du même genre que celle déjà rencontrée s'impose ici : c'est que le déterminant Δ_2 ne soit pas nul. Notre méthode cesse d'être applicable pour les systèmes de valeurs qui satisferaient à la fois aux conditions

$$(23) \quad \Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = 0.$$

C'est là un fait exceptionnel. Mais nous verrons plus loin que les points correspondants de l'enveloppe sont encore en général réguliers. Seule la représentation paramétrique au moyen du paramètre a tombe en défaut. La possibilité de ce dernier fait a déjà été indiquée au début de cette étude, car nous avons vu que les conclusions relatives à la représentation au moyen du paramètre a étaient subordonnées à la non-vérification simultanée des égalités (23) par les systèmes x, y, z, a étudiés.

Passons maintenant aux points de l'enveloppe pour lesquels on aurait à la fois

$$(24) \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial a^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial a^2} = 0.$$

Différentions les équations (7) après y avoir remplacé

x, y et z par les fonctions $f(a)$, $\varphi(a)$, $\psi(a)$ qui figurent dans les équations de l'enveloppe (9); on obtient, en tenant compte des deux dernières dans le résultat obtenu en différenciant les deux premières (1),

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial x} f' + \frac{\partial f_1}{\partial y} \varphi' + \frac{\partial f_1}{\partial z} \psi' = 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} f' + \frac{\partial f_2}{\partial y} \varphi' + \frac{\partial f_2}{\partial z} \psi' = 0, \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial a \partial x} f' + \frac{\partial^2 f_1}{\partial a \partial y} \varphi' + \frac{\partial^2 f_1}{\partial a \partial z} \psi' + \frac{\partial^2 f_1}{\partial a^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial a \partial x} f' + \frac{\partial^2 f_2}{\partial a \partial y} \varphi' + \frac{\partial^2 f_2}{\partial a \partial z} \psi' + \frac{\partial^2 f_2}{\partial a^2} = 0. \end{array} \right.$$

Si, au point étudié, les deux dérivées $\frac{\partial^2 f_1}{\partial a^2}$, $\frac{\partial^2 f_2}{\partial a^2}$ sont nulles les équations (25) conduisent immédiatement au résultat suivant : les trois dérivées f' , φ' et ψ' sont nulles pour ce point. Il ne peut y avoir exception que si les déterminants Δ_1 et Δ_2 sont nuls tous deux en même temps. Le point considéré sera donc en général un point singulier sur l'enveloppe. Donc :

THÉORÈME. — *Si une courbe mobile dépendant d'un paramètre, définie par les équations*

$$f_1(x, y, z, a) = 0, \quad f_2(x, y, z, a) = 0,$$

admet une enveloppe dont certains points appartiennent aussi à la courbe

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial a^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial a^2} = 0,$$

(1) La considération de ces équations conduit à un résultat intéressant lorsque l'une des deux dérivées $\frac{\partial^2 f_1}{\partial a^2}$ est nulle sans que l'autre le soit. Le point de l'enveloppe, avons-nous vu, est alors régulier; f' , φ' et ψ' ne sont pas nuls en général pour ce point et l'on conclut de là sans peine que le déterminant Δ_1 est nul.

ceux-ci seront des points, du genre rebroussement, de l'enveloppe de la courbe mobile étudiée. Cette proposition sera en général en défaut dans le cas tout à fait exceptionnel où les points en question appartiendraient en outre à la courbe (1)

$$\Delta_1(x, y, z, a) = 0, \quad \Delta_2(x, y, z, a) = 0.$$

En ces points l'enveloppe touche encore l'enveloppée.

Cette dernière partie reste à démontrer. La tangente de rebroussement à la courbe enveloppe admet pour paramètres directeurs les trois dérivées $f''(a)$, φ'' , ψ'' .

Or, si l'on différentie l'équation

$$f' \frac{\partial f_1}{\partial x} + \varphi' \frac{\partial f_1}{\partial y} + \psi' \frac{\partial f_1}{\partial z} = 0,$$

on obtient la suivante :

$$f'' \frac{\partial f_1}{\partial x} + \varphi'' \frac{\partial f_1}{\partial y} + \psi'' \frac{\partial f_1}{\partial z} + f' \frac{d}{da} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \varphi' \frac{d}{da} \frac{\partial f_1}{\partial y} + \psi' \frac{d}{da} \frac{\partial f_1}{\partial z} = 0,$$

qui, au point considéré, se réduit à

$$f'' \frac{\partial f_1}{\partial x} + \varphi'' \frac{\partial f_1}{\partial y} + \psi'' \frac{\partial f_1}{\partial z} = 0.$$

On voit de même que les trois dérivées secondes f'' , φ'' , ψ'' vérifient, au point considéré, l'équation

$$f'' \frac{\partial f_2}{\partial x} + \varphi'' \frac{\partial f_2}{\partial y} + \psi'' \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0.$$

(1) Le manque de place ne nous permet pas de discuter complètement ce cas tout à fait spécial. Le lecteur pourra examiner deux dispositions différentes qui se présentent en examinant l'enveloppe de l'une ou de l'autre des deux paraboles

$$x^2 + 2\lambda y + (\lambda - 1)^2 = 0 \qquad x^2 + 2\lambda y + \lambda^2 = 0.$$

Les deux équations précédentes, homogènes en f'' , φ'' et ψ'' , étant précisément celles qui définissent les paramètres directeurs de l'enveloppée, notre proposition est complètement démontrée.

Des développements précédents résulte le corollaire suivant :

COROLLAIRE. — *L'enveloppe d'une courbe déterminée par une surface fixe et une surface mobile présente en général des rebroussements (1).*

Soient en effet

$$F(x, y, z) = 0, \quad f(x, y, z, a) = 0$$

les équations de la courbe mobile. Les rebroussements de son enveloppe seront donnés par le système des quatre équations

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= 0, & f(x, y, z, a) &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial a}(x, y, z, a) &= 0, & \frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(x, y, z, a) &= 0, \end{aligned}$$

qui, admettant en général des systèmes isolés de solutions communes, déterminent sur l'enveloppe au plus une suite discontinue de points de rebroussements. Leur nombre sera fini si les équations F et f sont algébriques, il a d'ailleurs été donné plus haut.

(1) Elle présente aussi normalement des points réguliers pour lesquels la représentation paramétrique par a cesse d'être analytique car les deux équations $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$ se réduisent dans ce cas à la seule équation $\Delta(x, y, z, a) = 0$ en posant

$$\Delta = \frac{D\left(F, f \frac{\partial f}{\partial a}\right)}{D(x, y, z)},$$

Ce résultat est évidemment applicable, comme celui du texte, aux enveloppes dans le plan.

Ce résultat s'applique immédiatement à l'enveloppe d'une famille de courbes planes mobiles dans un plan fixe.

Il nous reste à établir que, ainsi que nous l'avons annoncé, les points de l'enveloppe dont les coordonnées et la valeur correspondante du paramètre a vérifient les équations (23) ne présentent en général aucune particularité, en supposant bien entendu que les deux dérivées secondes $\frac{\partial^2 f_1}{\partial a^2}$ et $\frac{\partial^2 f_2}{\partial a^2}$ n'y sont pas nulles en même temps. Supposons par exemple $\frac{\partial^2 f_1}{\partial a^2} = 0$; on peut alors tirer a en fonction de x , y et z de la troisième équation (7) :

$$(26) \quad a = \mu(x, y, z).$$

D'autre part, le point considéré étant, comme dans toute cette étude, supposé simple sur l'enveloppée, on pourra toujours tirer des équations de celle-ci deux des coordonnées en fonction de la troisième et du paramètre a ; par exemple

$$(27) \quad x = \chi_1(z, a), \quad y = \chi_2(z, a).$$

Si l'on porte ces valeurs dans l'équation (26) on obtient la relation

$$(28) \quad \theta(z, a) = \mu[\chi_1(a), \chi_2(a), z] - a = 0.$$

Mais on a

$$\frac{\partial \theta}{\partial a} = \frac{\partial \mu}{\partial \chi_1} \frac{\partial \chi_1}{\partial a} + \frac{\partial \mu}{\partial \chi_2} \frac{\partial \chi_2}{\partial a} - 1,$$

et d'autre part les dérivées $\frac{\partial \chi_1}{\partial a}$ et $\frac{\partial \chi_2}{\partial a}$ satisfont évidem-

ment aux équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial \chi_1}{\partial a} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial \chi_2}{\partial a} + \frac{\partial f_1}{\partial a} &= 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \frac{\partial \chi_1}{\partial a} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \frac{\partial \chi_2}{\partial a} + \frac{\partial f_2}{\partial a} &= 0, \end{aligned}$$

qui, en un point de l'enveloppe où $\frac{\partial f_1}{\partial a}$ et $\frac{\partial f_2}{\partial a}$ sont nuls, entraînent

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial a} = \frac{\partial \chi_2}{\partial a} = 0 \quad (1),$$

le mineur $\frac{D(f_1, f_2)}{D(x, y)}$ n'étant pas nul aux environs de ce point puisque nous avons supposé légitime la formation du système (27). Dès lors, au point considéré, $\frac{\partial \theta}{\partial a}$ se réduit à -1 . On en conclut que l'équation (28) définit a en fonction analytique de z aux environs du point étudié, soit

$$(29) \quad a = \alpha(z),$$

En portant ce résultat dans les équations (27) on obtient x et y en fonction analytique de z

$$(30) \quad x = \xi(z), \quad y = \eta(z).$$

Le point considéré est donc un point ordinaire de l'enveloppe. On démontrerait, comme nous l'avons fait dans une étude précédente, que l'enveloppe touche encore l'enveloppée correspondante en ce point. Ce dernier est donc tout à fait régulier comme nous l'avions annoncé.

V. Afin d'éclairer cet exposé par quelques appli-

(1) On aurait pu prévoir ces relations en partant directement de la considération des équations (27).

cations, j'étudierai sommairement les trois exemples suivants :

1^o Enveloppe de la droite déterminée par les deux équations

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z, t) &\equiv x(3t + 2) - 2y - t^3 = 0, \\ f_2(x, y, z, t) &\equiv 2t^2x - z - t^4 = 0; \end{aligned}$$

on trouve sans peine que la droite admet une enveloppe dont les équations en fonction du paramètre t sont

$$x = t^2, \quad y = t^2 + t^3, \quad z = t^4;$$

l'origine est un rebroussement. L'application de notre méthode permettait de le prévoir. Les rebroussements de l'enveloppe doivent en effet s'obtenir en joignant aux équations de celle-ci les relations

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} = -6t = 0, \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2} - 4x - 3t^2 = 0.$$

L'ensemble de toutes ces équations admet le seul système de solutions

$$x = y = z = 0, \quad t = 0.$$

Le point correspondant de l'enveloppe est l'origine, l'enveloppée correspondante est la droite

$$x = y, \quad z = 0,$$

qui est bien, conformément à notre théorie, la tangente à l'enveloppe au point considéré.

2^o Enveloppe de la droite mobile dans un plan donné représentée par l'équation suivante, dans laquelle λ est le paramètre variable et a une constante donnée :

$$2\lambda^3x - 3(\lambda^2 + a^2)y + 6\lambda = 0.$$

L'emploi de notre méthode donne immédiatement

les coordonnées

$$x = \frac{1}{3a^2}, \quad y = \frac{2}{\varepsilon\sqrt{3}} \frac{1}{a}, \quad \lambda = \varepsilon a\sqrt{3} \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

de deux rebroussements à distance finie. Je laisse au lecteur le soin de développer ces calculs et de retrouver ces résultats au moyen de l'étude directe de l'enveloppe, quartique unicursale.

3° Enveloppe de la parabole représentée par l'équation

$$x^2 + 2\lambda y + K^2(\lambda^2 + 1) = 0,$$

dans laquelle K est une constante donnée et λ le paramètre de la famille.

Ici nous ne trouvons plus de rebroussement. Dans le cas où la constante K serait nulle l'enveloppe dégénère en un point : l'origine. Lorsque K a une valeur quelconque on trouve deux points

$$x = 0, \quad y = \varepsilon K^2 \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

correspondant aux valeurs $\lambda = \varepsilon$ du paramètre λ pour lesquels le déterminant Δ est nul. En ces points la représentation de l'enveloppe au moyen de λ tombera en général en défaut, ainsi que nous l'avons vu : c'est ce qu'on vérifie immédiatement sur l'exemple actuel, les équations donnant les coordonnées d'un point de l'enveloppe étant

$$x = \pm K\sqrt{\lambda^2 - 1}, \quad y = -K^2\lambda.$$

dont la première présente un branchement pour $\lambda = \pm 1$.

On vérifie facilement que cette courbe est une hyperbole admettant pour diamètres conjugués les axes de coordonnées et qu'elle touche bien l'enveloppée

correspondante aux points particuliers dont il vient d'être question.

VI. Dans les discussions précédentes nous avons laissé systématiquement de côté le cas où les singularités formeraient une suite continue. Nous allons maintenant examiner le cas où, quelle que soit la valeur de α , il existe en x, y, z une solution commune au système des six équations

$$(31) \quad f_1(x, y, z, \alpha) = 0, \quad f_2(x, y, z, \alpha) = 0,$$

$$(32) \quad \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} = 0,$$

$$(33) \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial \alpha^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial \alpha^2} = 0.$$

1° Si le système de solutions communes est fixe, c'est-à-dire si un ou plusieurs points fixes (x_i, y_i, z_i) satisfont, quelle que soit la valeur de α , aux six équations (31), (32) et (33), la courbe mobile passe par ces points fixes qui peuvent être considérés comme une enveloppe dégénérée. D'ailleurs, inversement, si la courbe mobile passe par un point fixe, les coordonnées de ce dernier et le paramètre α vérifieraient le système (31), (32), (33).

2° En général le système de solutions x, y, z correspondant à une valeur de α variera avec celle-ci. Autrement dit l'enveloppe aura une branche commune avec la courbe ayant pour équations les deux équations (33). Or, on peut toujours supposer que deux des coordonnées d'un point de la courbe mobile (C) représentée par les équations (31) peuvent, dans le voisinage d'un point régulier, s'exprimer en fonction de la troisième, par exemple y et z , en fonction de x ; dans ces expressions figurera le paramètre α , qui, sur une courbe C, doit être regardé comme constant. Deux différentiations

successives donnent alors

$$(34) \quad \begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} y'_x + \frac{\partial f_1}{\partial z} z'_x = 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} y'_x + \frac{\partial f_2}{\partial z} z'_x = 0, \end{cases}$$

$$(35) \quad \begin{cases} H_1(x, y, z) \equiv \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + 2y'_x \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} + 2z'_x \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial z} \\ \quad + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} (y'_x)^2 + 2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial z} y'_x z'_x \\ \quad + \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} (z'_x)^2 + \frac{\partial f_1}{\partial y} y''_{xx} + \frac{\partial f_1}{\partial z} z''_{xx} = 0, \\ H_2(x, y, z) \equiv \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + \dots \quad + \frac{\partial f_2}{\partial y} y''_{xx} + \frac{\partial f_2}{\partial z} z''_{xx} = 0. \end{cases}$$

Mais pour obtenir la branche commune aux courbes représentées respectivement par les équations (31), (32) et (33), il suffit de tirer α de l'une des équations (33), opération légitime sauf aux points (exceptionnels) où $\frac{\partial^3 f_1}{\partial \alpha^3}$ et $\frac{\partial^3 f_2}{\partial \alpha^3}$ seraient nuls et de porter le résultat [$\alpha = \lambda(x, y, z)$] dans les autres équations. On obtiendra ainsi les équations de cinq surfaces fixes ayant en commun la branche considérée. Désignons par $Y(x)$ et $Z(x)$ les fonctions qui donnent les coordonnées d'un point de cette courbe en fonction de l'une d'elles, celle-ci étant la coordonnée x pour fixer les idées. En différentiant les équations (31) et tenant compte des équations (32), après substitution au paramètre α de la fonction $\lambda(x, y, z)$, on obtient les relations

$$(36) \quad \begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} Y'_x + \frac{\partial f_1}{\partial z} Z'_x = 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} Y'_x + \frac{\partial f_2}{\partial z} Z'_x = 0. \end{cases}$$

En comparant au système (34), on conclut

$$(37) \quad Y'_x = y'_x, \quad Z'_x = z'_x.$$

La branche de courbe considérée est donc tangente en ce point à la courbe mobile correspondante. C'est donc une branche d'enveloppe ordinaire. En différenciant les équations (36), toujours après substitution de la fonction λ au paramètre a , on obtient par un calcul facile

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} H_1(x, Y, Z) + \frac{da}{dx} \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial a \partial x} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial a \partial y} Y'_x + \frac{\partial^2 f_1}{\partial a \partial z} Z'_x \right) = 0. \\ H_2(x, Y, Z) + \frac{da}{dx} \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial a \partial x} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial a \partial y} Y'_x + \frac{\partial^2 f_2}{\partial a \partial z} Z'_x \right) = 0. \end{array} \right.$$

En différenciant les équations (32), on obtient sans peine

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_1}{\partial a \partial x} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial a \partial y} Y'_x + \frac{\partial^2 f_1}{\partial a \partial z} Z'_x &= - \frac{da}{dx} \frac{\partial^2 f_1}{\partial a^2}, \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial a \partial x} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial a \partial y} Y'_x + \frac{\partial^2 f_2}{\partial a \partial z} Z'_x &= - \frac{da}{dx} \frac{\partial^2 f_2}{\partial a^2}, \end{aligned}$$

de telle sorte qu'en tout point de la branche d'enveloppe considérée, les équations (37) se réduisent, en vertu des équations (33), aux relations suivantes :

$$(39) \quad H_1(x, Y, Z) = 0, \quad H_2(x, Y, Z) = 0.$$

Si l'on compare aux équations (35) en tenant compte des équations (37) on trouve

$$Y''_x = y''_{x^2}, \quad Z''_x = z''_{x^2}.$$

La branche d'enveloppe étudiée possède donc en chacun de ses points un contact du second ordre avec l'enveloppée correspondante. On fera une application intéressante de cette théorie en l'appliquant à l'étude de l'enveloppe d'un cercle mobile dans le plan et comparant avec les résultats connus (1).

(1) Voir par exemple : GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique*, n° 204.

Il resterait à voir ce que deviennent les propriétés de l'enveloppe aux points exceptionnels, lorsqu'ils existent, ou les dérivées $\frac{\partial^3 f_1}{\partial a^3}$, $\frac{\partial^3 f_2}{\partial a^3}$ sont nulles toutes deux. C'est une étude analogue à celle que nous venons de faire. Les points correspondants sont en général des singularités s'ils sont isolés et forment une enveloppe ordinaire possédant avec l'enveloppée un contact du troisième ordre s'ils forment une branche de courbes. Ces résultats se généralisent de proche en proche.

VII. *Enveloppe d'une courbe définie sous forme paramétrique.* — Nous venons d'établir la théorie des enveloppes des courbes données sous forme cartésienne. Il nous resterait à chercher à déterminer, lorsqu'elle existe, l'enveloppe d'une courbe mobile donnée sous forme paramétrique. L'exposé théorique de cette recherche serait très simplifié par le fait que nous pourrions faire usage de certaines propriétés qui nous sont acquises et qui sont indépendantes du mode de représentation de l'enveloppée. Il nous resterait à rechercher les conditions qui caractérisent alors les diverses singularités. Ne voulant pas charger outre mesure la présente étude, nous nous bornerons à ce simple exposé, renvoyant aux Traités classiques pour les calculs habituels relatifs à cette question.