J. HAAG

Note sur les surfaces de Monge

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 78-82

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__78_0>

[O5iα]

NOTE SUR LES SURFACES DE MONGE;

Par M. J. HAAG,
Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée de Douai.

Les surfaces de Monge sont, comme on sait, les surfaces dont les normales sont tangentes à une développable, ou encore qui admettent une famille de géodésiques planes ou, ce qui revient au même, une famille de lignes de courbure géodésiques. On retrouve ces surfaces comme solutions des deux problèmes que nous allons exposer.

Premier problème. — *Considérons deux surfaces* S *et* S_1 *qui admettent même représentation sphérique de leurs lignes de courbure. Soient* M *et* M_1 *deux points correspondants. Proposons-nous de chercher si la congruence des droites* MM_1 *peut être une congruence de normales.*

A cet effet, nous allons appliquer la méthode du trièdre mobile.

Rapportons la surface S à ses lignes de courbure et prenons, comme d'habitude, l'axe des x du trièdre (T) tangent à la courbe $v =$ const.

Nous ferons d'abord la remarque suivante : les plans focaux de la congruence MM_1 passent respectivement par Mx et My.

Pour qu'ils soient rectangulaires, il faut et suffit que M_1 se trouve dans l'un des deux plans zMx, zMy.

Supposons-le, par exemple, dans le plan des zx et soient (x, o, z) les coordonnées de M_1 relativement au trièdre (T). Écrivons que, pour $dv = o$, le point M_1 a un déplacement élémentaire parallèle à Mx. Les projections de ce déplacement sont, avec les notations usuelles (*voir* Darboux, *Théorie des surfaces,* t. II, p. 385 et 386),

$$D_x = dx + A\,du + qz\,du,$$
$$D_y = rx\,du,$$
$$D_z = dz - qx\,du.$$

Il faut, en particulier, qu'on ait $D_y = o$, d'où

$$r = o,$$

en excluant le cas où S_1 serait parallèle à S.

On déduit de là $\frac{\partial A}{\partial v} = o$, et, par suite, les lignes $v =$ const. sont des géodésiques. Comme elles sont lignes de courbure, *la surface* S *est une surface de Monge.*

Il est aisé de voir que les surfaces S_1 correspondantes, ainsi que les surfaces admettant pour normales les droites MM_1 sont aussi des surfaces de Monge dont la nappe développable de la surface des centres de courbure est la même que pour S.

Second problème. — *Déterminer toutes les surfaces qui admettent plusieurs déformations conservant les lignes de courbure.*

Adoptons encore la méthode du trièdre mobile. Il s'agit de trouver des fonctions A et C de u et v, telles que le système (A), de la page 386 citée plus haut, admette plusieurs solutions en p, q, p_1, q_1. Or, ce système se réduit à

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial v} - \dfrac{\partial r_1}{\partial u} = -\, q p_1, \\ \dfrac{\partial p_1}{\partial u} = -\, q r_1, \\ \dfrac{\partial q}{\partial v} = r p_1. \end{cases}$$

Il faut déterminer r et r_1 pour qu'il admette plusieurs solutions en p_1 et q. Posons à cet effet

$$M = \frac{\partial r_1}{\partial u} - \frac{\partial r}{\partial v}.$$

On a

$$p_1 = \frac{M}{q},$$

d'où

$$\begin{cases} \dfrac{1}{q}\dfrac{\partial M}{\partial u} - \dfrac{M}{q^2}\dfrac{\partial q}{\partial u} + q r_1 = 0, \\ \dfrac{\partial q}{\partial v} = r\dfrac{M}{q}, \end{cases}$$

ou, en posant $q^2 = \theta$,

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \theta}{\partial u} = 2\theta \dfrac{1}{M}\dfrac{\partial M}{\partial u} + \dfrac{2 r_1}{M}\theta^2, \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial v} = 2 r M. \end{cases}$$

Exprimons la condition d'intégrabilité ; il vient, tous calculs faits,

$$\theta^2 \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{r_1}{M}\right) + \theta\left(\frac{\partial^2 \log M}{\partial u\, \partial v} + 4 r r_1\right) + r\frac{\partial M}{\partial u} - M\frac{\partial r}{\partial u} = 0.$$

Si cette condition n'est pas satisfaite identiquement, il ne pourra pas y avoir plusieurs solutions pour le système (2). Nous devons donc avoir

$$(3)\qquad \frac{r_1}{M} = U, \qquad \frac{r}{M} = V, \qquad \frac{\partial^2 \log M}{\partial u\, \partial v} + 4 r r_1 = 0,$$

et, alors, il y aura pour le système (2) et, par suite, pour le système (1), une infinité de solutions dépendant d'une constante arbitraire.

Étudions maintenant le système (3), auquel il faut joindre l'équation

$$(4) \qquad \frac{\partial r_1}{\partial u} - \frac{\partial r}{\partial v} = \mathrm{M}.$$

Si l'on pose $\mathrm{M} = e^{\mu}$, on déduit de (3) et (4) les deux équations suivantes :

$$(5) \qquad \mathrm{U}\frac{\partial \mu}{\partial u} - \mathrm{V}\frac{\partial \mu}{\partial v} + \mathrm{U}' - \mathrm{V}' - 1 = 0,$$

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 \mu}{\partial u\, \partial v} + 4\,\mathrm{UV}e^{2\mu} = 0.$$

Différentions (5) par rapport à v, il vient, en tenant compte de (6),

$$-4\,\mathrm{U}^2\mathrm{V}e^{2\mu} - \mathrm{V}'\frac{\partial \mu}{\partial v} - \mathrm{V}\frac{\partial^2 \mu}{\partial v^2} - \mathrm{V}'' = 0.$$

Différentions cette équation par rapport à u, en tenant compte de (6) :

$$-8\,\mathrm{UU}'\mathrm{V}e^{2\mu} - 8\,\mathrm{U}^2\mathrm{V}e^{2\mu}\frac{\partial \mu}{\partial u} + 4\,\mathrm{UVV}'e^{2\mu} + 4\,\mathrm{V}\left(\mathrm{UV}'e^{2\mu} + 2\,\mathrm{UV}e^{2\mu}\frac{\partial \mu}{\partial v}\right) = 0$$

ou, en divisant par $8\,e^{2\mu}$,

$$\mathrm{UV}\left(\mathrm{U}\frac{\partial \mu}{\partial u} - \mathrm{V}\frac{\partial \mu}{\partial v} + \mathrm{U}' - \mathrm{V}'\right) = 0.$$

En tenant compte de (5), cette équation se réduit à

$$\mathrm{UV} = 0.$$

Supposons, par exemple, $\mathrm{U} = 0$. On en déduit $r_1 = 0$ et, comme dans le problème précédent, on en conclut qu'on a affaire à une surface de Monge. Mais, ici, on a une surface de Monge particulière.

Nous avons, en effet,

$$\frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u} = \frac{2}{M}\frac{\partial M}{\partial u} = \frac{2}{r}\frac{\partial r}{\partial u},$$

d'où

$$\frac{\theta}{r^2} = V_1^2,$$

c'est-à-dire

$$\frac{q}{r} = V_1.$$

Comme $p = 0$, on en déduit que l'axe instantané du trièdre (T) est fixe par rapport à ce trièdre quand $v =$ const. Il a donc une direction fixe dans l'espace. Comme il est dans le plan zOy, ce plan enveloppe un cylindre quand u seul varie. Mais c'est précisément le plan des courbes $u =$ const., c'est-à-dire des géodésiques planes. Comme ce plan doit envelopper une développable, quels que soient u et v, cette développable est le cylindre précédent. *Nous avons donc une surface moulure.*

On pourrait continuer l'étude du problème ; mais c'est inutile, car on sait que toute surface moulure admet une infinité de déformations conservant les lignes de courbure. M. Darboux a indiqué les formules définissant ces déformations (voir *Théorie des surfaces*, t. I, p. 105). Nous venons d'établir que *ces déformations sont les seules conservant les lignes de courbure.*