NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 572-575

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__572_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2085.

(1907, p. 528.)

Soient U *et* V *deux quadriques ayant en commun une droite* γ; *soit* β *une génératrice de* U *du même système que* γ, *soit* α *une génératrice de* V *du même système que* γ; *un plan passant par* γ *contient encore une génératrice* x *de* U, *une génératrice* y *de* V; *les deux plans* (x, β) *et* (y, β) *se coupent suivant une droite* z: *quel est le lieu de cette droite lorsqu'on fait varier le plan mené par* γ?

(G. F.)

SOLUTION

Par M. M. Têtu.

Les deux faisceaux de plans d'arêtes α, β sont respectivement homographiques au faisceau d'arêtes γ. Donc, l'intersection de deux plans correspondants a pour lieu une quadrique passant par α et β. De plus, cette quadrique passe par l'intersection des deux génératrices x et y, dont le lieu est la cubique gauche commune aux deux quadriques U et V, laquelle rencontre d'ailleurs en deux points chacune des droites α et β. La quadrique lieu est ainsi bien définie.

M. Têtu.

Autres solutions de MM. Bros et Tabacoff.

2087.

(1908, p. 48.)

Intégrer l'équation différentielle

$$A(x)y'^2 - A'(x)yy' + C(x)y^2 = H(x),$$

avec la condition

$$H = CA - \frac{A'^2}{4}.$$

A *et* C *sont des fonctions arbitraires de* x. A′ *est la dérivée de* A.

(PIERRE FAVRE.)

SOLUTION

Par M. PARROD.

On a

$$y' = \frac{A'y \pm 2\sqrt{-H(y^2 - A)}}{2A}.$$

Posons

$$y = \frac{1+t^2}{2t}\sqrt{A},$$

d'où

$$\sqrt{y^2 - A} = \frac{1-t^2}{2t}\sqrt{A}$$

et

$$y' = -\frac{(1-t^2)t'}{2t^2}\sqrt{A} + \frac{1+t^2}{4t^2}\frac{A'}{\sqrt{A}}.$$

Portons ces valeurs dans l'expression de y' et simplifions; il vient

$$\frac{t'}{t} = \frac{2\sqrt{-H}}{A};$$

donc

$$\log t = 2\int\frac{\sqrt{-H}}{A}\,dx.$$

Autre solution par M. J. ROSE.

2088.

(1907, p. 48.)

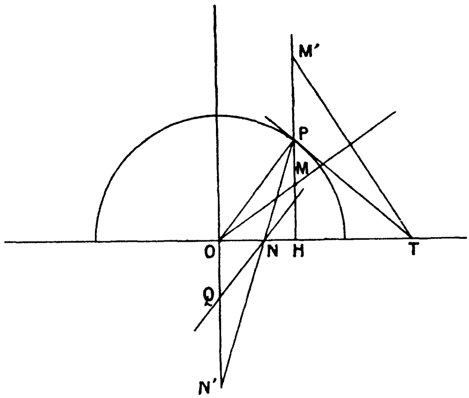
La tangente et la normale en un point M *d'une ellipse de centre* O *rencontrent le grand axe en* T *et* N : 1° *la perpendiculaire abaissée de* T *sur* OM *enveloppe une ellipse;* 2° *la parallèle menée par* N *à* OM *est normale à une ellipse fixe.*

(E.-N. BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. TÉTU.

1° Soit P l'intersection de la perpendiculaire abaissée de M sur le grand axe avec le cercle directeur; soit M′ son intersection avec la perpendiculaire abaissée de T sur OM. Les



angles $\widehat{POH}$, $\widehat{MOH}$ étant respectivement complémentaires de $\widehat{PTH}$, $\widehat{M'TH}$, on a

$$\frac{M'H}{PH} = \frac{PH}{MH} = \frac{a}{b}.$$

Donc l'enveloppe de TM' est le lieu du point M', qui est une ellipse.

2° Considérons l'ellipse comme projection de son cercle principal; la normale en M est la projection de la droite PN N', et l'on a

$$\frac{N'P}{N'N} = \text{const}.$$

Menons par N la parallèle à OP : NQ; on a

$$\frac{NQ}{PO} = \text{const.},$$

d'où

$$NQ = \text{const}.$$

Donc cette droite enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements, donc sa projection enveloppe une développée d'ellipse.

Autres solutions par MM. Betto, Bouvaist, Bratu, Bros, Gaedecke, Lez, Retali, J. Rose.

2091.

(1908, p. 96.)

Le nombre n étant supposé impair, démontrer que, si l'on évalue la quantité $\frac{\sin nx}{\sin x}$ en fonction de $\cos x$, *l'expression obtenue est un produit de deux facteurs rationnels. Que représente chacun de ces facteurs ?*

(G. F.)

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

$f(\cos x) = \frac{\sin nx}{\sin x}$ est, quel que soit n, une fonction rationnelle de $\cos x$; elle s'annule pour $x = \frac{K\pi}{n}$, K prenant les $n-1$ valeurs $1, 2, \ldots, n-1$.

Si n est impair, les $n-1$ racines de

$$f(\cos x) = 0$$

sont deux à deux opposées, puisque

$$\cos\frac{p\pi}{n} = -\cos\frac{(n-p)\pi}{n} \qquad (p < n).$$

$f(\cos x)$ est par suite un produit de deux facteurs rationnels $f_1(\cos x)$ et $f_2(\cos x)$, le premier ayant pour racines

$$\cos\frac{\pi}{n}, \quad \cos\frac{2\pi}{n}, \quad \ldots, \quad \cos\frac{n-1}{2n}\pi,$$

le second

$$\cos\frac{n+1}{2n}\pi, \quad \ldots, \quad \cos\frac{(n-1)\pi}{n}.$$