NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DE SPARRE

Note au sujet de la composition de mécanique du concours d'agrégation de 1908

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 543-557
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__543_0>

NOTE AU SUJET DE LA COMPOSITION DE MÉCANIQUE DU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1908;

PAR M. LE COMTE DE SPARRE.

La question de Mécanique pour cette année au concours d'agrégation soulève, au sujet de la théorie du frottement, certaines questions qu'il me paraît intéressant de signaler. Ainsi qu'on le verra en effet, dans un cas particulier ce problème conduit à une indétermination apparente, non dans une question de mouvement, comme dans les problèmes signalés par M. Painlevé, mais dans une question d'équilibre.

Je rappelle l'énoncé des deux premières parties du problème, qui sont les seules dont j'aurai à m'occuper :

On considère dans un plan vertical deux droites indéfinies se coupant en un point O, *l'une* $x'Ox$ *horizontale, l'autre* $z'Oz$ *verticale. Une tige* AB *homogène pesante d'épaisseur négligeable, de longueur* $2l$ *et de masse* M, *est telle que ses extrémités restent constamment l'une* A *sur* $x'Ox$, *l'autre* B *sur* $Z'OZ$ *et puissent passer sur ces droites d'un côté à l'autre du point* O. *Un point particulier* D *de la tige, dont les distances aux extrémités* A *et* B *restent invariables, est attiré par le point* O *proportionnellement à la distance; la valeur absolue de la force qui le sollicite est représentée par* $\frac{Mg}{4\lambda}$ OD, g *désignant l'accélération de la pesanteur et* λ *un nombre positif inférieur à* l. *On appelle* C *le milieu de la tige* *et a le segment* CD *compté positivement dans le sens* CA; *enfin on désigne par* θ *l'angle que forme la droite* OC *avec la verticale descendante.*

1° *On suppose que les liaisons auxquelles est soumise la tige* AB *soient sans frottement; on demande de déterminer les positions d'équilibre de cette tige et de rechercher parmi ces positions celles pour lesquelles l'équilibre est stable.*

2° *On suppose plus généralement que les droites* $x'Ox$, $z'Oz$ *soient dépolies, et que les coefficients de frottement de la tige sur ces droites soient très petits.*

On demande de déterminer, en fonction des données et de ces coefficients de frottement, une valeur approchée des angles θ *correspondant aux limites des régions dans lesquelles peut être placée la tige sans que l'équilibre cesse de subsister.*

Lorsque les liaisons sont sans frottement on a, pour la fonction des forces,

$$U = Mgl\cos\theta - \frac{1}{2}\frac{Mg}{4\lambda}\overline{OD}^2.$$

Mais dans le triangle OCD, où l'angle C est égal à 2θ [1], on a

$$\overline{OD}^2 = l^2 + a^2 - 2al\cos 2\theta,$$

de sorte qu'en négligeant la constante

$$U = Mgl\left(\cos\theta + \frac{a}{4\lambda}\cos 2\theta\right).$$

Les positions d'équilibre sont donc données par l'équation

$$\frac{dU}{d\theta} = -Mgl\sin\theta\left(1 + \frac{a}{\lambda}\cos\theta\right) = 0,$$

[1] Si la tige est au-dessous de Ox et à $2\pi - 2\theta$ si elle est au-dessus.

les positions d'équilibre stable correspondant aux points pour lesquels U est maximum.

On voit alors de suite que la discussion se résume dans le Tableau suivant, où pour $|a| > \lambda$ on pose

$$\cos\theta_1 = -\frac{\lambda}{a}$$

et où de plus on ne considère que les valeurs de θ comprises entre o et π, puisqu'à toute position d'équilibre située à droite de Z'OZ en correspond évidemment une symétrique située à gauche.

1° $a < -\lambda$:

$\theta = 0$, équilibre instable;
$\theta = \theta_1$, équilibre stable;
$\theta = \pi$, équilibre instable.

2° $-\lambda \leqq a \leqq \lambda$:

$\theta = 0$, équilibre stable;
$\theta = \pi$, équilibre instable;

3° $a > \lambda$:

$\theta = 0$, équilibre stable;
$\theta = \theta_1$, équilibre instable;
$\theta = \pi$, équilibre stable.

Passons maintenant à la seconde question.

Soit Z la composante normale à Ox de la réaction en A; la composante tangentielle de cette réaction sera $\varepsilon f Z$ où f est le coefficient de frottement et où $\varepsilon = \pm 1$, le signe devant être choisi de telle façon que

$$\varepsilon Z > 0$$

si le mouvement de A se fait dans le sens négatif, et qu'au lieu de cela

$$\varepsilon Z < 0$$

si le déplacement de A se fait dans le sens positif ([1]); de même soient X la composante normale de la réaction de $Z'OZ$ en B et $-\varepsilon' f' X$ la composante tangentielle de cette réaction où f' est le coefficient de frottement de $Z'OZ$ et $\varepsilon' = \pm 1$, le signe devant être choisi de façon que

$$\varepsilon' X > 0$$

si le mouvement de B se fait dans le sens positif, et qu'au lieu de cela

$$\varepsilon' X < 0$$

si le déplacement de B sur $x'Ox$ se fait dans le sens négatif.

Remarquons de plus que, par suite des conditions géométriques pour

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2},$$

donc si la droite AB est au-dessous de $x'Ox$, le déplacement de B a lieu dans le sens positif si celui de A a lieu dans le sens négatif; on doit donc avoir

$$\varepsilon\varepsilon' Z X > 0.$$

Si au lieu de cela

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi,$$

donc si la tige AB est au-dessus de $x'Ox$, le déplacement de B a lieu dans le sens négatif sur $Z'OZ$ lorsque le déplacement de A a lieu dans le sens négatif sur $x'Ox$; on a donc

$$\varepsilon\varepsilon' Z X < 0.$$

([1]) Comme nous l'avons dit précédemment, nous supposons AB à droite de $Z'OZ$ et par suite θ compris entre 0 et π; de plus, nous supposons OZ dirigé suivant la verticale descendante.

Ceci posé, nous obtiendrons les équations d'équilibre de la barre en écrivant que la résultante de translation des forces et la somme de leurs moments par rapport à O sont nuls, ce qui nous donnera

$$(1) \qquad X - \frac{Mg}{4\lambda}(l+a)\sin\theta + f\varepsilon Z = 0,$$

$$(2) \qquad Z + Mg - \frac{Mg}{4\lambda}(l-a)\cos\theta - f'\varepsilon' X = 0,$$

$$(3) \qquad 2lZ\sin\theta - 2lX\cos\theta + Mgl\sin\theta = 0.$$

On tire alors de (1) et (2)

$$(4) \quad X(1+ff'\varepsilon\varepsilon') = Mg\left[\frac{l+a}{4\lambda}\sin\theta + f\varepsilon\left(1 - \frac{l-a}{4\lambda}\cos\theta\right)\right],$$

$$(5) \quad Z(1+ff'\varepsilon\varepsilon') = Mg\left(\frac{l+a}{4\lambda}f'\varepsilon'\sin\theta - 1 + \frac{l-a}{4\lambda}\cos\theta\right),$$

et, en portant ces valeurs dans (3), divisant par Mgl et changeant le signe, on aura

$$(6) \quad \sin\theta\left(1 + \frac{a}{\lambda}\cos\theta\right) + 2f\varepsilon\left(1 - \frac{l-a}{4\lambda}\cos\theta\right)\cos\theta$$
$$- \frac{l+a}{2\lambda}f'\varepsilon'\sin^2\theta - ff'\varepsilon\varepsilon'\sin\theta = 0.$$

Puisqu'on suppose les coefficients de frottement très petits, il existera, sauf des cas exceptionnels, dans le voisinage de chaque position d'équilibre correspondant au cas où il n'y a pas de frottement, une région plus ou moins étendue de part et d'autre de cette position où le système sera encore en équilibre par suite du frottement.

Comme nous supposons f et f' très petits, nous négligerons (sauf le cas où les termes du premier degré par rapport à ces quantités disparaîtraient) les termes qui les contiendront au second degré.

1° *Positions d'équilibre dans le voisinage de* $\theta = 0$.

— Si dans (6) nous négligeons les termes du troisième degré en f et f', nous aurons

$$\theta\left(1+\frac{a}{\lambda}\right)+2f\varepsilon\left(1-\frac{l-a}{4\lambda}\right)=0.$$

Donc, en supposant

$$a+\lambda \lesseqgtr 0,$$

$$\theta = f\varepsilon\,\frac{l-a-4\lambda}{2(a+\lambda)};$$

d'ailleurs, comme nous supposons que nous ne considérons que les valeurs positives de θ, nous pourrons prendre, pour la limite de la région d'équilibre,

$$\theta=\alpha=\left|\frac{l-a-4\lambda}{2(a+\lambda)}\right|f.$$

La région d'équilibre s'étendra alors de $\theta=\alpha$ à $\theta=-\alpha$.

Remarquons de plus que ε doit, d'après ce qui précède, avoir le signe de

$$\frac{l-a-4\lambda}{a+\lambda}.$$

On a d'ailleurs pour Z dans ce cas, en se bornant à la partie principale,

$$Z = Mg\,\frac{l-a-4\lambda}{4\lambda},$$

et par suite εZ aura le signe de $a+\lambda$.

Donc le point A tend à se déplacer dans le sens négatif si

$$a>-\lambda,$$

c'est-à-dire si $\theta=0$ correspond à une position d'équilibre stable (pour le cas où il n'y a pas de frottement). Il tend au lieu de cela à se déplacer dans le sens positif si

$$a < -\lambda ;$$

donc si $\theta = 0$ correspond, pour le cas où il n'y a pas de frottement, à une position d'équilibre instable.

Ce fait pouvait être regardé comme évident *a priori*. Nous avons dû toutefois dans ce qui précède supposer

$$a + \lambda \lesseqgtr 0.$$

Supposons maintenant

$$a = -\lambda.$$

L'équation (6) deviendra

$$(7) \quad \sin\theta(1 - \cos\theta) + 2f\varepsilon \frac{4\lambda - (l + \lambda)\cos\theta}{4\lambda}\cos\theta$$
$$- \frac{l - \lambda}{2\lambda} f'\varepsilon' \sin^2\theta - ff'\varepsilon\varepsilon' \sin\theta = 0.$$

On est conduit à distinguer deux cas :

$$4\lambda - (l + \lambda) \lesseqgtr 0 \qquad \text{ou} \qquad l \gtrless 3\lambda.$$

On aura alors, en réduisant l'équation (7) à sa partie principale,

$$\theta^3 = -f\varepsilon \frac{3\lambda - l}{\lambda}$$

ou, comme nous nous bornons aux valeurs positives de θ,

$$\theta^3 = \frac{|l - 3\lambda|}{\lambda} f.$$

Nous avons d'ailleurs dans le cas actuel, pour la valeur principale de Z,

$$Z = Mg \frac{l \quad 3\lambda}{4\lambda},$$

et par suite εZ sera toujours positif, résultat qu'on pouvait prévoir puisque, lorsqu'il n'y a pas de frottement, l'équilibre pour $\theta = 0$ est stable.

2° Supposons maintenant

$$l = 3\lambda$$

ou, plus généralement, supposons

$$a = l - 4\lambda,$$

l étant quelconque; l'équation (6) se réduira alors à

$$\sin\theta\left(1 + \frac{l-4\lambda}{\lambda}\cos\theta\right) + 4f\varepsilon\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\theta \\ - \frac{l-2\lambda}{\lambda}f'\varepsilon'\sin^2\theta - ff'\varepsilon\varepsilon'\sin\theta = 0$$

ou

$$2\sin\frac{\theta}{2}\left[\left(1 + \frac{l-4\lambda}{\lambda}\cos\theta\right)\cos\frac{\theta}{2} + 2f\varepsilon\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta \right. \\ \left. - 2\frac{l-2\lambda}{\lambda}f'\varepsilon'\sin\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} - ff'\varepsilon\varepsilon'\cos\frac{\theta}{2}\right] = 0.$$

On a donc d'abord la racine $\theta = 0$ et de plus ce sera, si

$$l \lesseqgtr 3\lambda,$$

la seule racine de l'équation précédente voisine de zéro.

On voit donc que dans ce cas, bien qu'il y ait frottement, il n'y a qu'une position unique d'équilibre et non pas une région d'équilibre, ainsi que cela a généralement lieu lorsqu'il y a frottement; il est d'ailleurs bien facile d'expliquer ce fait en remarquant que Z est nul pour

$$a = l - 4\lambda \quad \text{et} \quad \theta = 0,$$

de sorte que la force de frottement $Zf\varepsilon$ est aussi nulle dans ce cas.

Nous allons voir toutefois que si, en général, il y a une position unique d'équilibre pour $\theta = 0$, $a = l - 4\lambda$, il n'en sera pas toujours ainsi. Supposons en effet qu'on ait

$$a = -\lambda \quad \text{et} \quad l = 3\lambda\,;$$

l'équation (7) se réduira à

$$4\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} + f\varepsilon\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta \right.$$
$$\left. - f'\varepsilon'\sin\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{ff'\varepsilon\varepsilon'}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right) = 0.$$

Si nous réduisons cette équation à sa partie principale, elle deviendra

$$(8) \qquad \theta[\theta^2 - 2(f'\varepsilon' - f\varepsilon)\theta - 2ff'\varepsilon\varepsilon'] = 0.$$

Nous avons d'abord la racine $\theta = 0$ qui correspond à la position d'équilibre unique lorsqu'il n'y a pas de frottement; mais, bien que le frottement soit nul pour $\theta = 0$, il y a dans ce cas particulier une région d'équilibre, de part et d'autre de ce point, due au frottement.

L'équation (8) en effet, en dehors de la racine $\theta = 0$, a deux autres racines très petites, devenant nulles l'une et l'autre pour

$$f = f' = 0,$$

et qui donnent par suite une région où le système est en équilibre.

Toutefois les deux racines sont toutes deux très petites, et elles s'annulent également l'une et l'autre pour $f = f' = 0$; il semble donc y avoir indétermination, mais il est facile de la lever.

Ces deux racines sont d'ailleurs, en remarquant que $\varepsilon^2 = \varepsilon'^2 = 1$,

$$\alpha_1 = f'\varepsilon' - f\varepsilon + \sqrt{f^2 + f'^2},$$
$$\alpha_2 = f'\varepsilon' - f\varepsilon - \sqrt{f^2 + f'^2}.$$

On peut d'ailleurs supposer toujours, ainsi que nous l'avons fait remarquer, les signes de ε et ε' choisis de telle façon que α_1 et α_2 soient positifs. Nous avons de plus dans le cas actuel, en nous bornant à la partie principale,

$$X = \frac{Mg\theta}{2}, \qquad Z = \frac{Mg\theta}{2}(f'\varepsilon' - \theta).$$

Puisque nous supposons toujours θ positif, on a

$$X > 0.$$

Comme d'ailleurs les conditions géométriques imposent dans le cas actuel, ainsi que nous l'avons vu,

$$\varepsilon\varepsilon' ZX > 0,$$

nous devrons donc avoir

$$(9) \qquad \varepsilon\varepsilon' Z > 0.$$

Considérons maintenant d'abord la racine α_1; nous aurons pour cette racine

$$Z = \frac{Mg\alpha_1}{2}(f'\varepsilon' - \alpha_1) = -\frac{Mg\alpha_1}{2}\left(\sqrt{f^2 + f'^2} - f\varepsilon\right) < 0.$$

On doit donc avoir, en vertu de la relation (9),

$$(10) \qquad \varepsilon\varepsilon' < 0.$$

De plus, ainsi que nous l'avons fait remarquer, les signes de ε et ε' doivent pouvoir être choisis de telle façon que α_1 soit positif.

Ceci exigera, à cause de (10), qu'on prenne

$$\varepsilon' = 1, \qquad \varepsilon = -1;$$

on aura alors

$$\alpha_1 = f' + f + \sqrt{f^2 + f'^2},$$

$$X = \frac{Mg\alpha_1}{2}, \qquad Z = -\frac{Mg\alpha_1}{2}\left(\sqrt{f^2 + f'^2} + f\right).$$

Considérons ensuite la racine α_2; nous aurons alors

$$Z = \frac{Mg\alpha_2}{2}\left[\sqrt{f'^2+f^2}+f\varepsilon\right] > 0,$$

et (9) donne alors

$$(11) \qquad \varepsilon\varepsilon' > 0.$$

Mais, si ε et ε' satisfont à la relation (11), α_2 ne peut être positif et par suite cette racine doit être rejetée.

Nous voyons donc que dans ce cas de

$$a = -\lambda, \qquad l = 3\lambda,$$

bien que toutes les réactions soient nulles pour $\theta = 0$ (qui correspond à une position d'équilibre stable lorsqu'il n'y a pas de frottement), on a par suite du frottement une région d'équilibre s'étendant de

$$\theta = \alpha_1 \quad \text{à} \quad \theta = -\alpha_1,$$

de sorte que l'indétermination qui semble résulter des trois racines 0, α_1 et α_2 de l'équation (8) n'est qu'apparente et qu'on n'a en réalité qu'une solution. De plus, dans le cas actuel $\varepsilon Z > 0$ et $\varepsilon' X > 0$, et le frottement est dirigé dans un sens tel que θ tend à décroître, ce qui devait être puisque, lorsqu'il n'y a pas de frottement, la position $\theta = 0$ est une position d'équilibre stable.

3° Cherchons maintenant la région d'équilibre dans le voisinage de $\theta = \pi$.

Posons pour cela

$$\theta = \pi - \alpha,$$

où nous pouvons, pour la raison de symétrie déjà donnée, supposer α positif.

Les équations (4), (5), (6) deviennent alors

$$(4') \quad X(1+ff'\varepsilon\varepsilon') = Mg\left[\frac{l+a}{4\lambda}\sin\alpha + f\varepsilon\left(1+\frac{l-a}{4\lambda}\cos\alpha\right)\right],$$

$$(5') \quad Z(1+ff'\varepsilon\varepsilon') = Mg\left(\frac{l+a}{4\lambda}f'\varepsilon'\sin\alpha - 1 - \frac{l-a}{4\lambda}\cos\alpha\right),$$

$$(6') \quad \sin\alpha\left(1-\frac{a}{\lambda}\cos\alpha\right) - 2f\varepsilon\left(1+\frac{l-a}{4\lambda}\cos\alpha\right)\cos\alpha$$
$$- \frac{l+a}{2\lambda}\varepsilon' f'\sin^2\alpha - ff'\varepsilon\varepsilon'\sin\alpha = 0.$$

Si

$$a \lessgtr \lambda,$$

on aura alors, en se bornant à la partie principale,

$$\alpha = \frac{4\lambda + l - a}{2(\lambda - a)} f\varepsilon,$$

$$Z = -Mg\frac{l+4\lambda-a}{4\lambda};$$

d'ailleurs

$$a < l,$$

de sorte que

$$4\lambda + l - a > 0,$$

et, en choisissant ε de façon que α soit positif, on a

$$\alpha = \frac{4\lambda + l - a}{2|a-\lambda|} f.$$

D'après cela,

$$Z\varepsilon$$

sera négatif si $a < \lambda$ et positif si $a > \lambda$.

Donc le mouvement du point A tend à se produire dans le sens positif si $a < \lambda$ et dans le sens négatif si $a > \lambda$, ce qui devait être, car, lorsqu'il n'y a pas de frottement, l'équilibre est instable dans le premier cas et stable dans le second.

Si au lieu de cela

$$a = \lambda,$$

l'équation (6′), bornée à sa partie principale, donnera

$$\alpha^3 = \frac{3\lambda + l}{\lambda} f\varepsilon$$

ou, en choisissant ε de façon que α soit positif,

$$\alpha^3 = \frac{3\lambda + l}{\lambda} f;$$

d'ailleurs

$$Z = -Mg\frac{l + 3\lambda}{4\lambda},$$

de sorte que

$$\varepsilon Z < 0,$$

et, par suite, le mouvement du point A tend à se produire dans le sens positif, ce qui devait être puisque dans ce cas, lorsqu'il n'y a pas de frottement, la valeur $\theta = \pi$ correspond à une position d'équilibre instable.

4° Cherchons enfin la région d'équilibre dans le voisinage de $\theta = \theta_1$, ce qui suppose

$$|a| > \lambda.$$

Posons alors

$$\theta = \theta_1 - \alpha$$

avec

$$\cos\theta_1 = -\frac{\lambda}{a}$$

et où nous supposons de plus $\theta_1 < \pi$.

Si alors nous négligeons les termes en α^2, l'équation (6) devient

$$\frac{a\alpha}{\lambda}\sin^2\theta_1 - \frac{\lambda(l + 3a)}{2a^2} f\varepsilon - \frac{l + a}{2\lambda} f'\varepsilon' \sin^2\theta_1 = 0.$$

On en déduit, en remplaçant $\sin\theta_1$ par sa valeur,

$$\alpha = \frac{\lambda^2(l + 3a) f\varepsilon}{2a(a^2 - \lambda^2)} + \frac{l + a}{2a} f'\varepsilon'.$$

On a d'ailleurs en se bornant à la partie principale, en vertu de (4) et (5),

$$X = Mg\,\frac{l+a}{4\lambda}\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{a^2}},$$

$$Z = -\frac{Mg(3a+l)}{4a};$$

de plus, comme

$$\cos\theta_1 = -\frac{\lambda}{a},$$

on a, si $a > \lambda$,

$$\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \pi.$$

On doit alors avoir, en vertu des conditions géométriques,

$$\varepsilon\varepsilon' Z X < 0,$$

mais dans ce cas

$$X > 0, \qquad Z < 0;$$

on devra donc prendre

$$\varepsilon\varepsilon' > 0,$$

et si l'on veut que α soit positif on aura

$$\varepsilon = \varepsilon' = 1,$$

ce qui conduit à

$$\alpha = \frac{\lambda^2(l+3a)f}{2a(a^2-\lambda^2)} + \frac{l+a}{2a}f'.$$

Si, au lieu de cela,

$$a < -\lambda,$$

on aura

$$0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$$

et les conditions géométriques donneront

$$\varepsilon\varepsilon' Z X > 0,$$

et dans ce cas X est positif et Z a le signe de $3a + l$, de sorte que

$$\varepsilon\varepsilon'(3a + l) > 0.$$

Donc, si l'on veut que α soit positif, on devra prendre

$$\varepsilon' = -1, \qquad \varepsilon(3a + l) = -|3a + l|,$$

et l'on aura en définitive dans tous les cas

$$\alpha = \left|\frac{l + 3a}{a}\right| \frac{\lambda^2 f}{2(a^2 - \lambda^2)} + \frac{l + a}{2|a|} f';$$

la région d'équilibre s'étendra alors de $\theta_1 - \alpha$ à $\theta_1 + \alpha$. La valeur de α ne sera jamais nulle et toujours acceptable.

On remarquera de plus que si $a > 0$ on a, pour $\alpha > 0$,

$$\varepsilon' X > 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon Z < 0,$$

ce qui fait voir que le point A tend à se déplacer dans le sens positif et le point B également, ce qui devait être puisque $\theta_1 > \frac{\pi}{2}$ et que la position d'équilibre, lorsqu'on néglige le frottement, est instable. Si au lieu de cela $a < 0$,

$$\varepsilon' X < 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon Z < 0,$$

puisque ε est de signe contraire à $3a + l$, tandis que Z a le même signe que cette quantité.

On en conclut que pour α positif le point A tend à se déplacer $\left(\text{puisque } \theta_1 < \frac{\pi}{2}\right)$ dans le sens positif et le point B dans le sens négatif, ce qui doit être, car, d'après ce que nous avons vu, lorsqu'il n'y a pas de frottement, la valeur $\theta = \theta_1$ correspond alors à une position d'équilibre stable.