

## Certificats de mécanique rationnelle

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 8  
(1908), p. 517-520

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1908\\_4\\_8\\_517\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8_517_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1908, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

## CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

---

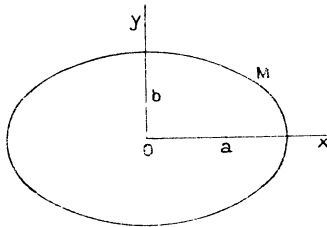
**Bordeaux.**

ÉPRUVE THÉORIQUE. — I. *Questions de cours :*

1° *Ellipsoïde d'inertie ;*

2° *Stabilité de l'équilibre. — Théorème de Lagrange ; démonstration de Lejeune-Dirichlet.*

II. **PROBLÈME.** — *Un point matériel M de masse m est assujéti à se mouvoir sans frottement sur une ellipse de*



*centre O et dont les demi-axes ont pour longueurs a et b ( $a > b$ ) ; il est d'autre part attiré par le point O proportionnellement à sa masse et à sa distance r au point O. (On représentera par  $F = -m\alpha^2 r$  cette force attractive.)*

1° *Étudier le mouvement du point M et déterminer la réaction N exercée à chaque instant par la courbe sur le point matériel M.*

2° Montrer que, si la réaction  $N$  est nulle à un instant, elle est nulle pendant tout le cours du mouvement.

3° Étudier en particulier le cas où les conditions initiales sont les suivantes :

$$x_0 = 0, \quad y_0 = b. \quad x'_0 = \alpha \sqrt{a^2 - b^2}, \quad y'_0 = 0$$

( $x$  et  $y$  désignant dans ces formules les coordonnées du point  $M$ ).

ÉPREUVE PRATIQUE. — Quelle doit être la vitesse, au point le plus bas de sa trajectoire, d'un pendule simple pour que la tension du fil devienne nulle quand ce fil fait avec la verticale ascendante un angle de  $45^\circ$ ?

A partir de l'instant où la tension est ainsi nulle, le mouvement du point devient parabolique; déterminer le point où il rencontre l'horizontale du point d'attache du fil.

Données en unités C. G. S :

Longueur du pendule,  $l = 87$ ;

Accélération de la pesanteur,  $g = 980$ .

(Juillet 1908.)

### Grenoble.

COMPOSITION. — Dans un plan vertical fixe,  $P$ , se trouvent deux tiges, rectilignes, homogènes, égales, de même masse,  $AB$  et  $CD$ , qui sont articulées en leur milieu  $G$ . Leurs extrémités  $A$  et  $C$  sont assujetties à rester sur une droite fixe  $Ox$ . Les liaisons sont sans frottement.

On demande : 1° de trouver le mouvement du système ; 2° de calculer les réactions exercées par  $Ox$  en  $A$  et  $C$  ; 3° de déterminer la réaction qui s'exerce en  $G$  sur la barre  $AB$ .

On admettra qu'à l'instant initial  $G$  est sur la perpendiculaire  $Oy$  à  $Ox$  menée par  $O$  en dessous de  $Ox$  et que le système part du repos.

On appelle  $2l$  la longueur commune des barres,  $m$  leur masse,  $\alpha$  l'angle de la verticale descendante avec  $Ox$ ,  $x$  l'abscisse de  $G$ ,  $\theta$  l'angle de  $AB$  avec  $Ox$ .

*N. B.* — On admettra que, si les barres se rencontrent,

elles peuvent se traverser mutuellement, de façon que le mouvement se continue sans choc.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Un solide homogène  $S$ , de masse  $M$ , est limité extérieurement par un cylindre de révolution de hauteur  $h$  et de rayon  $R$ .

Soient  $O$  un point de l'une des bases situé à une distance  $d$  ( $d < R$ ) de l'axe de révolution et  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  trois axes rectangulaires,  $Oz$  étant parallèle aux génératrices du cylindre,  $Ox$  rencontrant l'axe de révolution :

1° Former l'équation de l'ellipsoïde d'inertie de  $S$  relatif à  $O$ .

2° Soit  $O'$  le point où  $Oz$  rencontre la seconde base. On suppose que  $O$  et  $O'$  soient fixes et situés sur une même verticale et que  $S$  tourne uniformément autour de  $OO'$  avec une vitesse angulaire  $\omega$ . Déterminer les réactions exercées par  $O$  et  $O'$ .

3° Le solide étant animé du mouvement précédent, on lui applique, à un moment donné, et sans changer les liaisons, deux couples résistants  $\Gamma$ ,  $\Gamma'$  dont les moments sont, en direction, parallèles à  $Oz$  et, en intensité, l'un  $N$  constant, l'autre proportionnel à la vitesse angulaire de rotation; le coefficient de proportionnalité étant  $\alpha$ . Calculer  $N$  et  $\alpha$  de façon que la vitesse angulaire soit  $\omega\varepsilon$  au bout d'un temps  $t_1$  ( $\varepsilon < 1$ ), et que le solide s'arrête au bout du temps  $2t_1$ .

(Juillet 1908.)

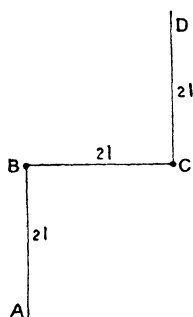
### Lille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Extension du théorème des moments cinétiques et du théorème des forces vives au mouvement relatif d'un système matériel autour de son centre de gravité.

II. Une tige  $BC$  est articulée à ses extrémités avec deux autres tiges identiques  $BA$  et  $CD$ . Ces trois tiges homogènes et pesantes sont placées sur un plan horizontal, sur lequel elles peuvent glisser sans frottement.

Initialement,  $AB$  et  $CD$  sont perpendiculaires à  $BC$ , dans des sens opposés. et le système est au repos. On applique alors aux extrémités libres  $A$  et  $D$  deux percussions données formant un couple :

1° Calculer les percussions de réaction qui se produisent



aux articulations B et C, et déterminer la distribution des vitesses que ces percussions impriment aux barres.

2° Étudier le mouvement parallèle des barres.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Un parallélépipède rectangle homogène pesant a pour arêtes  $OA = 3^m$ ,  $OB = 2^m$ ,  $OC = 1^m$ . Il peut pivoter autour de l'arête horizontale fixe OB. Initialement, l'arête OC est dirigée suivant la verticale ascendante, puis le corps est abandonné sans vitesse. Calculer :

- 1° La longueur du pendule simple synchrone ;
- 2° La durée de l'oscillation ;
- 3° Le temps nécessaire pour que le plan AOB devienne vertical ;
- 4° La vitesse angulaire dans cette dernière position.

(Juin 1908.)