NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. DELTOUR

Continuants : applications à la théorie des nombres

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 481-500

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__481_0>

[I 23 a]

CONTINUANTS : APPLICATIONS A LA THEORIE DES NOMBRES;

PAR M. A. DELTOUR.

(SUITE.)

REPRÉSENTATION AU MOYEN DE CONTINUANTS DE LA RELATION EN NOMBRES ENTIERS

$$aa' + bb' + cc' = 0. \tag{1}$$

63. Le problème à résoudre consiste à trouver quatre suites α, β, γ, δ, telles que les six continuants qui figurent dans la relation (IV) (n° 17),

$$\Sigma(\alpha\eta\,o\,\underline{\beta})(\gamma\eta\,o\,\underline{\delta}) = 0, \tag{IV}$$

représentent respectivement les six nombres entiers a, a', b, b', c, c'.

Cherchons d'abord à quelles conditions doivent satisfaire ces nombres pour qu'il y ait une solution.

Désignons les quatre quantités du n° 17

$$x = \frac{(\alpha)}{(\alpha_{0,1})}, \qquad y = \frac{(\beta)}{(\beta_{0,1})}, \qquad z = \frac{(\gamma)}{(\gamma_{0,1})}, \qquad t = \frac{(\delta)}{(\delta_{0,1})}$$

respectivement par les fractions

$$\frac{x}{x'}, \quad \frac{y}{y'}, \quad \frac{z}{z'}, \quad \frac{t}{t'},$$

qui doivent être irréductibles.

Les équations du problème sont

$$\left\{\begin{aligned} a &= xy' - x'y, & a' &= zt' - z't,\\ b &= xz' - x'z, & b' &= ty' - t'y,\\ c &= xt' - x't, & c' &= yz' - y'z. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

On en déduit les égalités suivantes qu'on peut d'ailleurs vérifier en remplaçant a, b, c, a', b', c' par leurs valeurs (2) :

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} a'x + bt - cz = 0, \\ -at + b'x + cy = 0, \\ az - by + c'x = 0, \\ a'y + b'z + c't = 0. \end{array}\right.$$

$$(3')\qquad \left\{\begin{array}{l} a'x' + bt' - cz' = 0, \\ -at' + b'x' + cy' = 0, \\ az' - by' + c'x' = 0, \\ a'y' + b'z' + c't' = 0. \end{array}\right.$$

Dans chacun des systèmes (3), (3'), deux des égalités sont une conséquence des deux autres en tenant compte de la relation (1).

En multipliant l'une des égalités (3) par un nombre quelconque u', l'égalité correspondante de (3') par un autre nombre u et retranchant, on obtiendra une relation semblable avec des inconnues telles que

$$(xu' - x'u).$$

On peut déterminer u et u' de telle sorte que l'une quelconque de ces inconnues, par exemple $(xu' - x'u)$, soit égale à 1, puisque x et x' sont premiers entre eux.

On en conclut que, *dans chacune des égalités* (3), *les nombres obtenus en divisant les trois coefficients par leur plus grand commun diviseur doivent être premiers entre eux deux à deux.*

Ces conditions jointes à celle de l'irréductibilité des fractions telles que $\frac{x}{x'}$ sont nécessaires pour qu'il y ait une solution.

Il reste à démontrer qu'elles sont suffisantes.

64. Soient :

d le plus grand commun diviseur de a, a', b, b', c, c', donnant pour quotients a_1, a'_1, b_1, b'_1, c_1, c'_1 ;

m le plus grand commun diviseur de a'_1, b'_1, c'_1 ;

n » a'_1, b_1, c_1 ;

p » a_1, b'_1, c_1 ;

q » a_1, b_1, c'_1.

Les quatre nombres m, n, p, q sont premiers entre eux deux à deux ; car, si m et n, par exemple, avaient un facteur commun, ce facteur divisant b'_1 et c_1 diviserait p et a_1 et par suite les six nombres a_1, b_1, c_1, a'_1, b'_1, c'_1, contrairement à l'hypothèse.

Chacun de ceux-ci est, par conséquent, divisible par le produit de deux des nombres m, n, p, q.

On posera donc

$$\begin{aligned} a &= dpqa_2, & a' &= dmna'_2, \\ b &= dqnb_2, & b' &= dmpb'_2, \\ c &= dnpc_2, & c' &= dmqc'_2, \end{aligned}$$

les facteurs non communs à deux de ces quantités étant premiers entre eux lorsque ces quantités ne sont pas désignées par la même lettre (a, b ou c).

Les équations (1) et (3) deviennent

$$(1') \qquad a_2 a'_2 + b_2 b'_2 + c_2 c'_2 = 0,$$

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} ma'_2 x + qb_2 t - pc_2 z &= 0, \\ -qa_2 t + mb'_2 x + nc_2 y &= 0, \\ pa_2 z - nb_2 y + mc'_2 x &= 0, \\ na'_2 y + pb'_2 z + qc'_2 t &= 0. \end{aligned} \right.$$

Il est inutile d'écrire les équations semblables provenant de (3').

65. Proposons-nous de résoudre le système (4).

Considérons, à cet effet, la première égalité.

Supposons que x ait une valeur donnée. Il existe au moins une solution z, t, puisque qb_2 et pc_2 sont premiers entre eux.

En multipliant l'égalité par a_2 et en tenant compte de (1'), elle peut s'écrire

$$b_2(qa_2t - mb'_2x) = c_2(pa_2z + mc'_2x),$$

et, en la comparant aux deux égalités suivantes, on a (r étant un nombre entier)

$$r = \frac{qa_2t - mb'_2x}{c_2} = \frac{pa_2z + mc'_2x}{b_2} = ny.$$

Le nombre r doit donc être divisible par n.

Or, les solutions t de la première égalité diffèrent entre elles d'un multiple de pc_2, les nombres r correspondants d'un multiple de pqa_2.

Puisque n et pqa_2 sont premiers entre eux, il existe au moins une valeur de r divisible par n, et par suite une solution pour y.

Une solution étant donnée y, z, t, on aura la solution générale $y+h$, $z+k$, $t+l$ pour des valeurs de h, k, l satisfaisant aux conditions

$$\begin{aligned} qb_2l &= pc_2k, \\ nc_2h &= qa_2l, \\ pa_2k &= nb_2h, \end{aligned}$$

ou

$$\frac{h}{pqa_2} = \frac{k}{qnb_2} = \frac{l}{npc_2} = f,$$

où f est un entier.

66. Pour trouver maintenant les suites α, β, γ, δ, nous mettrons la relation (IV) sous la forme

$$\Sigma(\bar{\eta}\bar{o}\eta o\overbrace{\alpha\eta o\underline{\beta}})(\overbrace{\gamma o\underline{\eta}\underline{\alpha}}\eta o\overbrace{\alpha\eta o\underline{\delta}}) = 0.$$

Elle se compose alors au moyen de quatre suites α', β', γ', δ', qui sont

$$\begin{aligned}
(\alpha') &= (\eta\,\mathrm{o}),\\
(\beta') &= (\beta\,\mathrm{o}\,\underline{\eta}\,\underline{\alpha}),\\
(\gamma') &= (\gamma\,\mathrm{o}\,\underline{\eta}\,\underline{\alpha}),\\
(\delta') &= (\delta\,\mathrm{o}\,\underline{\eta}\,\underline{\alpha}).
\end{aligned}$$

La relation étant symétrique par rapport à α, β, γ, δ, il existe trois autres formes analogues en opérant sur β, γ, δ de la même façon que sur α.

Le caractère de cette nouvelle forme consiste en ce qu'on a

$$\begin{aligned}
(\alpha') &= 0,\\
(\alpha'_{0,1}) &= 1.
\end{aligned}$$

Réciproquement, lorsqu'on a une telle relation (IV) en α', β', γ', δ', on passe à la première en α, β, γ, δ en détachant la partie commune des suites $\beta'\gamma'\delta'$ pour en composer α.

Il suffit, par conséquent, de trouver quatre suites telles que α', β', γ', δ'.

Faisant donc $x = 0$, $x' = 1$ dans (2), ce système se réduit aux conditions

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{ll}
a = -y, & a' + bt' - cz' = 0,\\
b = -z, & -at' + b' + cy' = 0,\\
c = -t, & az' - by' + c' = 0.
\end{array}\right.$$

Les trois dernières se confondent avec le système (3'), où l'on fait $x' = 1$.

Or, nous avons vu que ce système admet au moins une solution.

Si, en outre, cette solution est telle que les fractions $\frac{y}{y'}$, $\frac{z}{z'}$, $\frac{t}{t'}$ soient irréductibles, celles-ci permettent de trouver β', γ', δ'.

En particulier, lorque $d = 1$, cette dernière condition est satisfaite; car si y et y', c'est-à-dire a et y', par exemple, avaient un facteur commun, ce facteur diviserait b' et c' d'après (5). Mais les diviseurs de d peuvent seuls diviser à la fois a, b' et c' (n° 63).

67. *Changements de signes dans la relation* (1). — La formule (IV) se prête à la représentation de (1) pour toutes les valeurs relatives que prennent les quantités a, a', b, b', c, c'.

Car, en substituant la suite $(0, \eta)$ à $(\eta, 0)$ dans l'un quelconque des continuants de (IV), on change le signe de ce dernier (T_6) (n° 12).

Par exemple, la relation (1) étant représentée par (IV), la relation

$$(-a)(-a') + bb' + cc' = 0$$

sera représentée par

$$\begin{aligned}&(\alpha, 0, \eta, \beta)(\gamma, 0, \eta, \delta)\\ &\quad + (\alpha, \eta, 0, \gamma)(\delta, \eta, 0, \beta) + (\alpha, \eta, 0, \delta)(\beta, \eta, 0, \gamma) = 0.\end{aligned}$$

68. *Cas particulier* : $ab - cd = \pm 1$. — Dans le cas particulier où la relation (IV) prend la forme (VI) et où (1) devient

$$(6) \qquad ab - cd = \pm 1,$$

l'identification se fait en posant

$$a = \mathrm{N}, \qquad c = \mathrm{R}$$

et en cherchant le continuant (α) qui correspond à $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{R}}$. Celui-ci est pris long ou court de manière à donner à n_α la parité qui convient.

Relativement aux signes de a, b, c, d, on peut se proposer de représenter ces quatre quantités affectées de tous les signes possibles compatibles avec l'égalité donnée.

Cette question s'est présentée notamment au n° 57 dans la recherche des suites $\beta^{(r)}$.

Elle y a été résolue d'une manière particulière en donnant par convention le même signe à c_r et à b_{r+1}.

Mais, pour la résoudre dans tous les cas, supposons a, b, c, d positifs, a étant le plus grand de ces nombres, et prenons comme point de départ le continuant positif

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k) = (a_1, \beta.\, a_k),$$

qui sert à représenter l'égalité (6) $ab - cd = \pm 1$.

On a les solutions suivantes pour les différents signes dont les nombres a, b, c, d sont affectés :

a.	b.	c.	d.	(α).
$+$	$+$	$+$	$+$	(a_1, β, a_k)
$-$	$+$	$+$	$-$	$(-a_1, \eta_1, \beta, a_k)$
$-$	$+$	$-$	$+$	$(a_1, \beta, \eta_1, -a_k)$
$+$	$+$	$-$	$-$	$(-a_1, \eta_1, \beta, \eta_1, -a_k)$

Dans les autres cas, il suffit d'introduire entre deux *éléments de l'un des continuants précédents la suite* $(\eta_1, 0, \eta_1, 0)$ au moyen de laquelle on change les signes des quatre quantités.

De ces solutions (α) on déduit toutes les autres, qui sont évidemment en nombre illimité, par des transformations qui n'altèrent aucune des quatre quantités (α), $(\alpha_{1,1})$, $(\alpha_{0,1})$, $(\alpha_{1,0})$.

ADJOINTS ENTIERS.

69. *Définitions.* — Les adjoints seront dits *normaux, alternés, entiers, positifs, négatifs,* si leurs continuants le sont.

Ils admettront les mêmes résidus qu'eux.

70. *Réduction d'un adjoint à un adjoint positif.* — Nous aurons à appliquer ici les transformations indiquées au n° **21**, et il convient d'observer à ce propos que, en vertu de la propriété démontrée au n° **20**, la suite des éléments d'un adjoint doit être considérée comme disposée en cercle et comme formant une période.

L'adjoint correspond à différents continuants suivant celui de ses éléments qui est pris comme point de départ, mais sa valeur ne dépend que de la période. On peut donc choisir à volonté le premier élément lorsqu'on applique les transformations du n° **21**.

71. L'opération de la réduction repose sur la proposition suivante :

Si deux suites α, β *sont telles qu'on ait l'égalité*

$$((\alpha, \alpha) = ((\beta, \beta),$$

et si les adjoints $((\alpha)$, $((\beta)$ *sont différents de zéro, on a aussi*

$$((\alpha)^2 = ((\beta)^2.$$

En effet, de la relation

$$((\alpha, \alpha) = ((\alpha)^2 - 2(-1)^{n_\alpha},$$

qu'il est facile de vérifier et qui est d'ailleurs un cas particulier de la seconde relation (B_3) (n° 35), on déduit

$$((\alpha)^2 - ((\beta)^2 = 2[(-1)^{n_\alpha} - (-1)^{n_\beta}].$$

Si $n_\alpha \equiv n_\beta \pmod 2$, la proposition est démontrée.

Si n_α et n_β sont de parité différente, on peut supposer n_α pair; on a

$$((\alpha)^2 - ((\beta)^2 = 4,$$

ce qui ne peut avoir lieu que pour les valeurs

$$((\alpha) = \pm 2,$$
$$((\beta) = 0,$$

contrairement à l'hypothèse.

72. *Lorsqu'on transforme un adjoint double* $((\alpha, \alpha)$ *par les procédés des* nos 52, 53, 54, *la valeur absolue reste invariable et le résultat est un adjoint double positif* $((\beta, \beta)$.

Si l'on a soin d'appliquer chacune des transformations aux deux suites dont les éléments se correspondent deux à deux, la correspondance des éléments ne cesse pas d'exister et leur nombre reste toujours pair.

Examinons en détail chacune des opérations.

1° *Élimination des éléments nuls* (n° 52). — Il est évident que la valeur de l'adjoint ne change pas et que le résultat est de la forme $((\gamma, \gamma)$.

2° *Élimination des éléments égaux à* ± 1 (n° 53). — En passant de l'adjoint normal à l'adjoint alterné,

$$((i\gamma', (-1)^{n_\gamma} i\gamma'),$$

puis en supprimant $\pm$ I (les I supprimés se correspondent deux à deux et sont en nombre pair), on obtient un adjoint de la forme

$$((i\delta', (-1)^{n_\gamma} i\delta').$$

En revenant à un adjoint normal, ce dernier sera de la forme

$$((\delta, (-1)^{n_\gamma + n_\delta} \delta).$$

Dans la première et la dernière de ces opérations, la valeur de l'adjoint ne change pas, puisque le nombre des éléments est pair.

Entre ces deux opérations, on supprime un nombre pair de fois ± 1, et, par conséquent, la valeur est multipliée par un produit de facteurs égaux à $\pm i^2$.

La valeur absolue de l'adjoint n'est donc pas modifiée.

3° *Changement de signe des éléments* (n° 54). — Le dernier adjoint obtenu $(\delta, \pm \delta)$ ne renferme plus que des éléments $\geqq 2$ en valeur absolue.

Les suites η introduites pour changer les signes des éléments sont placées à chaque variation de signe et se correspondent deux à deux.

Le résultat final est donc de la forme $((\beta, \beta)$, tous les éléments étant positifs.

On sait d'ailleurs que cette opération ne modifie pas la valeur absolue.

Comme conclusion, *la réduction d'un adjoint donné* $((\alpha)$ *à un adjoint positif* $((\beta)$ *s'obtient en transformant l'adjoint double* $((\alpha, \alpha)$ *en adjoint double positif* $((\beta, \beta)$.

Exemple. — Pour

$$((\alpha) = ((3, -7, 11, -1, -2, 5, 8) = -24\,476,$$

on trouve

$$((\beta) = ((2, 1, 5, 1, 9, 2, 1, 4, 8) = 24\,476.$$

73. *Adjoints positifs de valeur donnée.* — La relation

$$\text{(VI)} \qquad (\alpha)(\alpha_{1,1}) - (\alpha_{0,1})(\alpha_{1,0}) = (-1)^{n_\alpha}$$

permet de trouver tous les adjoints positifs $((\alpha)$ ayant pour valeur un nombre positif donné N.

Remarquons que les deux résidus sont plus petits que (α) et posons

$$N = a + b \qquad (a \text{ et } b \text{ positifs, } a > b).$$

Décomposons alors $ab \pm 1$ en deux facteurs c, d $(c < a, d < a)$, et cherchons le continuant positif (α) qui correspond à la relation

$$(6) \qquad ab - cd = \pm 1.$$

L'adjoint $((\alpha)$ a pour valeur N.

Réciproquement, tout adjoint positif $((\alpha)$ de valeur N correspond à une certaine relation (6).

On aura donc tous les adjoints positifs de N en faisant de toutes les manières possibles les décompositions

$$N = a + b,$$
$$ab \pm 1 = cd,$$

qui sont en nombre fini.

Remarques. — 1° Le même adjoint est obtenu, en général, autant de fois qu'il contient d'éléments, puisque, par permutation circulaire de ces derniers, la valeur ne change pas et qu'à chaque permutation correspond une relation (6) distincte.

Toutefois, il est obtenu moins souvent si cette dernière condition n'est pas remplie, par exemple dans le cas d'un adjoint tel que $((\alpha^m)$ ou $((\alpha, \underline{\alpha})$.

2° Si l'adjoint $((\alpha)$ au lieu d'être positif est quelconque, il correspond encore à une relation (6), mais dans laquelle les entiers a, b, c, d ne sont plus soumis à des relations de grandeur.

Réciproquement, étant donnée une telle relation, on trouve un adjoint $((\alpha)$ correspondant qui se réduit à un adjoint positif par le procédé indiqué au numéro précédent.

Exemples. — 1° Soit $N = 41$; on trouve les adjoints positifs suivants :

$$((41), \quad ((1, 39), \quad ((3, 13), \quad ((3, 1, 1, 5), \quad ((1, 1, 7, 1, 1).$$

2° Soit $N = 59$; on trouve

$$((59), \quad ((1, 57), \quad ((3, 19), \quad ((2, 2, 11),$$
$$((3, 4, 4), \quad ((1, 1, 4, 1, 4), \quad ((1, 1, 1, 2, 1, 4).$$

74. *Transformation des adjoints positifs entre eux.* — Si les deux relations

$$ab - cd = \pm 1,$$
$$ab - c'd' = \pm 1,$$

où $cd = c'd'$, correspondent aux deux adjoints positifs $((\alpha)$, $((\alpha')$, l'un de ces derniers se transforme dans l'autre.

Soient, en effet,

$$(\alpha_{0,1}) = c = f.m, \qquad (\alpha'_{0,1}) = c' = f.m',$$
$$(\alpha_{1,0}) = d = g.m', \qquad (\alpha'_{1,0}) = d' = g.m$$

(m, m' premiers entre eux).

Puisque $(\alpha_{0,1})$ est divisible par m, (α) se transforme par le procédé du n° 57 en un continuant (β) tel que

$$(\beta_{0,1}) = f,$$
$$(\beta_{1,0}) = g.mm';$$

de même (β) en (α') en divisant le résidu de (β) par m'.

Conséquence. — Tout adjoint positif de valeur N se ramène de cette manière à un adjoint *pour lequel l'un des facteurs c, d est réduit à l'unité,* savoir :

1° Pour n_α pair, à

$$((0, a - 1, 1, b - 1),$$

où l'on a

$$c = 1,$$
$$d = ab - 1,$$

et qui se réduit à

$$((1, a + b - 2) = ((1, N - 2);$$

2° Pour n_α impair, à

$$((0, a, b),$$

où l'on a

$$c = 1,$$
$$d = ab + 1,$$

et qui se réduit à

$$((a + b) + ((N).$$

CONTINUANTS ET ADJOINTS UNITAIRES.

75. *Définition.* — On nommera *unitaires* les continuants entiers des types θ, θ', η, η', ainsi que les continuants alternés et les adjoints correspondants.

76. *Groupement des continuants par adjoints.* — Les continuants unitaires dont on a donné quelques exemples au n° **9** sont en nombre illimité. Leur classement et leur constitution présentent quelques particularités intéressantes. Il convient pour en faire l'étude de considérer leurs adjoints et, comme il sera indiqué au n° **79**, de faire usage du système alterné. Car on sait que, dans ce système, tous les continuants d'un adjoint unitaire appartiennent au même type (n° **31**, *Remarque*).

Nous supposerons que les adjoints n'ont aucun elément nul. Ceux qui en contiennent se déduisent en effet immédiatement des autres en y remplaçant certains éléments a par des suites b, α, 0, $-\alpha$, c (n° **21**).

77. *Un adjoint unitaire* $((\lambda)$ *se réduit à un adjoint positif* $((\beta)$ *pour lequel* $n_\beta = 0$.

On a, en effet,

$$((\lambda, \lambda) = (\lambda)^2 + 2(\lambda_{0,1})(\lambda_{1,0}) + (\lambda_{1,1})^2 = 2.$$

Suivant la règle générale (**n° 72**), $((\lambda, \lambda)$ se réduit à un adjoint double positif $((\beta, \beta)$ de même **valeur**.

Or, le développement de $((\beta, \beta)$, dans lequel tous les termes sont positifs, montre qu'on ne peut avoir $((\beta, \beta) = 2$ que si $n_\beta = 0$.

78. *Un adjoint unitaire, sans zéro,* $((\lambda)$ *a au moins un élément égal à* ± 1.

En effet, si tous les éléments étaient $\geqq 2$ en valeur absolue, $((\lambda, \lambda)$ se trouverait dans les conditions du n° 72 (3°) pour être réduit à un adjoint double positif $((\beta, \beta)$ de valeur 2 et tel que

$$n_\beta \geqq n_\lambda,$$

ce qui est impossible puisqu'on doit avoir

$$n_\beta = 0.$$

79. Dans les numéros suivants marqués (*Syst. alt.*), nous ferons usage du système alterné en supprimant le facteur i pour simplifier l'écriture. Il suffit de multiplier chaque élément par ce facteur pour revenir à la notation primitive. Ainsi, on écrira (α) au lieu de $(i\alpha)$.

80. *Tout adjoint unitaire rentre dans l'une des trois catégories*

$$((\alpha) = ((\lambda, \alpha'), \qquad ((\beta) = ((\lambda_{0,1}, \beta'), \qquad ((\gamma) = ((\lambda_{1,1}, \gamma'),$$

où (λ) *représente un unitaire quelconque* (*Syst. alt.*).

En effet, il résulte de la proposition précédente que, à défaut d'autre, une des suites $\pm I_{1,1}$ soit $(1, 1, 1)$ ou

$(-1, -1, -1)$ étant prise pour (λ), tout adjoint prendra l'une de ces trois formes, savoir : $((\alpha)$ ou $((\beta)$ s'il y a trois ou deux éléments successifs égaux à $+1$ ou à -1, $((\gamma)$ dans le cas contraire.

81. *Forme des adjoints* $((\alpha)$, $((\beta)$, $((\gamma)$ (*Syst. alt.*). — Cherchons maintenant les conditions que doivent remplir α', β', γ' pour que $((\alpha)$, $((\beta)$, $((\gamma)$ soient unitaires.

Pour $((\alpha)$, il faut et il suffit que $((\alpha')$ le soit aussi : le calcul ne présente aucune difficulté.

Quant à $((\beta)$ et $((\gamma)$, posons

$$\lambda = (l_2, \lambda_{1,1}, l_1) \left\{ \begin{array}{l} (\beta') = (l_1, 0, b_2, \beta'', b_1), \\ (\gamma') = (l_1, 0, c_2, \gamma'', c_1, 0, l_2). \end{array} \right.$$

On a

$$((\beta) = ((\lambda, 0, b_2, \beta'', b_1),$$
$$((\gamma) = ((\lambda, 0, c_2, \gamma'', c_1, 0).$$

Comme $((\alpha')$ dans $((\alpha)$, les suites qui viennent après λ dans ces expressions doivent donner des adjoints unitaires, savoir :

$$((0, b_2, \beta'', b_1) \quad \text{ou} \quad ((b_1 + b_2, \beta'')$$

et

$$((0, c_2, \gamma'', c_1, 0) \quad \text{ou} \quad ((c_2, \gamma'', c_1).$$

Par conséquent, $((\alpha)$, $((\beta)$, $((\gamma)$ sont formés au moyen de deux unitaires juxtaposés; l'un d'eux, dans $((\beta)$, commence par zéro et, dans $((\gamma)$, a ses deux éléments extrêmes nuls.

En représentant par μ un second unitaire, avec

$$(\mu) = (m_2, \mu_{1,1}, m_1),$$

et en posant

$$\alpha' = \mu, \qquad \beta'' = \mu_{0,1}, \qquad \gamma'' = \mu_{1,1},$$

ces adjoints s'écrivent

$$((\alpha) = ((\lambda, \mu),$$
$$((\beta) = ((\lambda_{0,1}, a, \mu_{0,1}, b),$$
$$((\gamma) = ((\lambda_{1,1}, l_1 + m_2, \mu_{1,1}, m_1 + l_2).$$

Dans $((\beta)$, a et b sont deux éléments liés par la condition

$$a + b = l_1 + m_1,$$

comme on le vérifie aisément. Il reste donc un paramètre variable lorsque λ et μ sont donnés.

$((\alpha)$ se présente comme un cas particulier de $((\beta)$ lorsqu'on fait

$$a = l_1, \qquad b = m_1.$$

A leur tour, λ et μ rentrent dans l'une des trois catégories et sont eux-mêmes formés au moyen d'autres unitaires, et ainsi de suite.

82. *Adjoints* $((\gamma)$ *dont tous les éléments sont positifs* (*Syst. alt.*). — D'après ce qui précède, tout adjoint unitaire peut être considéré comme composé au moyen d'adjoints $((\gamma)$. Il suffit en effet, pour cela, de terminer la série des décompositions lorsque tous les unitaires au moyen desquels est formé l'adjoint appartiennent à cette catégorie.

Les adjoints $((\gamma)$ se déduisent aussi les uns des autres, car on peut poursuivre la série des décompositions jusqu'à ce que le dernier élément ait disparu. Parmi eux, nous distinguerons spécialement, par analogie avec la réduction des continuants, ceux dont tous les éléments sont positifs et qui ne peuvent pas se mettre sous l'une des deux autres formes. Nous les désignerons par $((\delta)$.

83. *Mode de formation des adjoints* $((\delta)$ (*Syst.*

alt.). — Faisons

$$(\lambda) = (1, 1, 1)$$

et soit

$$((\delta) = ((1, \delta')$$

un adjoint de n_δ éléments positifs.

Mettons (δ') sous la forme $(1, 0, \delta'', 0, 1)$. $((\delta'')$ *appartient à la même catégorie que* $((\delta)$.

En effet, $((\delta'')$ a $n_\delta - 1$ éléments positifs et différents de zéro, puisque, par hypothèse, les deux éléments extrêmes de δ' sont $\geqq 2$; d'autre part, il n'est ni un $((\alpha)$ ni un $((\beta)$; autrement, un des unitaires λ, μ ou un des résidus $\lambda_{0,1}$, $\mu_{0,1}$ qu'il contiendrait se trouverait dans $((\delta)$, contrairement à l'hypothèse.

Réciproquement, soit

$$((\delta'') = ((d_2, \delta''_{1,1}, d_1)$$

un unitaire ayant $n_\delta - 1$ éléments positifs et défini comme ci-dessus. L'adjoint

$$((\delta) = ((d_1 + 1, 1, d_2 + 1, \delta''_{1,1}),$$

obtenu en introduisant

$$(0, \lambda, 0) = (0, 1, 1, 1, 0)$$

entre deux de ses éléments d_1, d_2, a n_δ éléments positifs. On voit d'ailleurs facilement, par un raisonnement analogue au précédent, qu'il ne peut pas prendre la forme $((\alpha)$ et qu'il ne peut prendre la forme (β) que si l'élément 1 se confond avec l'un des éléments a, b qui figurent dans l'expression de $((\beta)$ (n° **81**).

On obtiendra donc tous les adjoints $((\delta)$ de n_δ éléments en introduisant $\lambda = (0, 1, 1, 1, 0)$ de toutes les manières possibles dans ceux de $n_\delta - 1$ éléments, en laissant de côté ceux qui rentreraient dans la catégorie $((\beta)$.

On trouve pour les premières valeurs de n_δ [$((\delta)$ et $((\underline{\delta})$ étant considérés comme ne faisant qu'un seul adjoint] :

n_δ.	$((\delta)$.
3	((1, 1, 1)
4	((1, 2, 1, 2)
5	((2, 1, 3, 1, 2)
6	((3, 1, 2, 3, 1, 2)
	((2, 2, 1, 4, 1, 2)
	((1, 3, 1, 3, 1, 3)
7	((4, 1, 2, 2, 3, 1, 2)
	((3, 2, 1, 3, 3, 1, 2)
	((3, 1, 3, 1, 4, 1, 2)
	((3, 2, 1, 4, 1, 3, 1)
	((2, 2, 1, 5, 1, 2, 2)

84. *Adjoints unitaires composés de suites périodiques* (*Syst. alt.*). — Parmi les $((\delta)$ du numéro précédent, il en est qui se composent de suites périodiques, par exemple

$$((\overbrace{1,2},\ \overbrace{1,2}),\quad ((\overbrace{3,1,2},\ \overbrace{3,1,2}),\quad ((\overbrace{1,3},\ \overbrace{1,3},\ \overbrace{1,3}).$$

Proposons-nous de trouver d'une manière générale les adjoints unitaires qui jouissent de cette propriété.

85. *Un adjoint unitaire* (*à éléments positifs ou négatifs*) *composé de plus de trois périodes est un* $((\alpha)$ (*notation du n° 80*) (*Syst. alt.*). — En effet, dans chaque période se trouve au moins un élément égal à ± 1.

En éliminant de chacune d'elles ± 1, ainsi que les éléments nuls s'il y a lieu, on réduit l'adjoint à un autre qui contient un nombre moindre d'éléments et qui est composé du même nombre de périodes.

Après une série d'éliminations semblables, on obtient un adjoint dans lequel chaque période est réduite à un seul élément égal à zéro ou à ± 1.

Le nombre des périodes est nécessairement pair si cet élément est zéro et il est divisible par 3 lorsque l'élément est ± 1.

Dans tous les cas, le dernier adjoint ayant plus de trois périodes se met sous la forme $((\lambda, \mu)$ et par conséquent est un $((\alpha)$.

Il en est évidemment de même de l'adjoint donné.

Conséquence. — Les adjoints $((\beta)$, $((\gamma)$, $((\delta)$ *se composent au maximum de trois périodes.*

En désignant par ν une des suites dont se compose un de ces adjoints, celui-ci pourra prendre l'une des formes $((\nu^2)$ ou $((\nu^3)$.

86. *Conditions que doit remplir une suite* ν *pour que* $((\nu^2)$ *ou* $((\nu^3)$ *soit unitaire* (*Syst. alt.*). — Ces conditions résultent des relations suivantes, que le lecteur vérifiera sans difficulté :

$$
\begin{aligned}
(\nu^2) &= (\nu) \quad ((\nu) - (-1)^{n_\nu},\\
(\nu^2_{0,1}) &= (\nu_{0,1}) \; ((\nu),\\
(\nu^2_{1,0}) &= (\nu_{1,0}) \; ((\nu),\\
(\nu^2_{1,1}) &= (\nu_{1,1}) \; ((\nu) - (-1)^{n_\nu},\\
(\nu^3) &= (\nu) \quad [((\nu)^2 - (-1)^{n_\nu}] - (-1)^{n_\nu}((\nu),\\
(\nu^3_{0,1}) &= (\nu_{0,1})[((\nu)^2 - (-1)^{n_\nu}],\\
(\nu^3_{1,0}) &= (\nu_{1,0})[((\nu)^2 - (-1)^{n_\nu}],\\
(\nu^3_{1,1}) &= (\nu_{1,1})[((\nu)^2 - (-1)^{n_\nu}] - (-1)^{n_\nu}((\nu).
\end{aligned}
$$

1° Soit $((\nu^2)$ un adjoint unitaire.

Pour que $(\nu^2_{0,1})$ et $(\nu^2_{1,0})$ soient nuls, il faut qu'on ait soit

$$((\nu) = 0,$$

soit

$$((\nu_{0,1}) = 0,$$

$$((\nu_{1,0}) = 0.$$

Dans le dernier cas, $((\nu)$ serait un unitaire et $((\nu^2)$ un $((\alpha)$.

On doit donc avoir

$$((\nu) = 0.$$

Cette condition suffit d'ailleurs à rendre $((\nu^2)$ unitaire. Mise sous la forme

$$(\nu) + (\nu_{1,1}) = 0,$$

elle montre que les continuants (ν) et $-(\nu_{1,1})$ représentent un même nombre.

2° Soit $((\nu^3)$ un adjoint unitaire.

Pour la même raison que ci-dessus, on déduit des relations précédentes

$$((\nu)^2 - (-1)^{n_\nu} = 0.$$

Cette condition est suffisante. Elle montre que les continuants normaux de (ν) et de $(\nu_{1,1})$ représentent deux nombres qui diffèrent d'une unité.