NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. JUHEL-RÉNOY

Sur la règle des signes de Descartes

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 449-450

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__449_0>

[A3d]

SUR LA RÈGLE DES SIGNES DE DESCARTES;

PAR M. J. JUHEL-RÉNOY.

Considérons le polynome

$$f(x) \equiv x^n \varphi(x) + h,$$

$\varphi(x)$ étant un polynome de degré $m - n$ de la forme

$$K + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots,$$

et construisons la courbe ayant pour équation

$$y = x^n \varphi(x),$$

en remarquant que, pour x assez petit et positif, y a le même signe que K.

Notons encore que $\varphi(x)$ et $f'(x)$ ont le même nombre de variations et que le nombre de ces variations est égal à celui de $f(x)$ ou à ce nombre diminué d'une unité suivant que K et h ont le même signe ou des signes contraires.

Pour démontrer le théorème de Descartes, il suffit de faire voir que, si on l'admet pour les équations de degré $m - 1$, il est vrai pour une équation de degré m; car, étant vérifié pour une équation du premier degré, il est vrai d'une manière générale.

Supposons donc, K étant, par exemple, positif, que $f'(x)$ ait p variations et, par conséquent, $(p - 2l)$ racines positives; y aura, au plus, pour $x > 0$ $(p - 2l)$ maxima ou minima; tous ces maxima peuvent être positifs, mais, K étant positif, il ne peut pas y en avoir plus de $(p - 2l - 1)$ négatifs.

Or, pour résoudre l'équation

$$f(x) = 0,$$

il suffit de couper la courbe

$$y = x^n \varphi(x)$$

par la parallèle à l'axe des x, dont l'équation est

$$y = -h.$$

Si donc h est positif, l'équation $f(x) = 0$ a, au plus, $p - 2l$ racines positives, et, si elle en a moins, la différence est un nombre pair.

Si h est négatif, l'équation $f(x) = 0$ a, au plus, $(p - 2l + 1)$ racines positives et, si elle en a moins, la différence est un nombre pair.

Le théorème de Descartes est ainsi démontré, car, dans le cas de h positif, l'équation $f(x) = 0$ a p variations, et elle en a $(p + 1)$ dans le cas de h négatif.

L'hypothèse de $K < 0$ donne lieu à un raisonnement identique.