Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1908)

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 425-429

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__425_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1908).

Sujets des compositions.

Mathématiques spéciales.

Un contour convexe est formé des côtés parallèles AB, A′B′, de longueur $2l$, d'un rectangle ABB′A′ et des demi-cercles de rayon r décrits sur les deux autres côtés AA′ et BB′ comme diamètres. Il se déplace dans son plan d'une façon continue en restant tangent extérieurement à un demi-cercle fixe de rayon R et à la droite indéfinie D qui limite ce demi-cercle. On suppose que AB était sur D au début du mouvement et que A′B′

(1) La notion de *cycle* n'est pas au programme de l'Agrégation : c'est une lacune regrettable.

vient sur cette même droite à la fin du mouvement, après avoir touché le demi-cercle fixe.

1° Construire la trajectoire Γ du centre M du rectangle et reconnaître si elle est convexe;

2° Calculer l'aire limitée par Γ, dans l'hypothèse $R = r$, $l = r(\sqrt{3} - 1)$;

3° On suppose que l'angle dont tourne le contour est proportionnel au temps; on demande de placer le contour à un instant donné et de construire le vecteur vitesse du point M à cet instant [1].

4° Le côté A'B' étant tangent au demi-cercle fixe, trouver à un instant donné l'enveloppe des tangentes aux trajectoires des différents points du contour. Examiner les différents cas qui peuvent se présenter en supposant $R = r = l$.

Composition sur le Calcul différentiel et intégral.

I. On considère une famille F de courbes planes C représentées par l'équation générale

$$(C) \qquad f(x, y, \alpha) = 0,$$

où α est un paramètre variable.

On suppose la fonction f choisie de telle façon que les trois équations

$$(1) \qquad f = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0,$$

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} = 0$$

aient, pour chaque valeur déterminée de α, une solution commune (ξ, η).

Démontrer que, dans ces conditions :

Ou bien le point (ξ, η) est fixe, quel que soit α;

---

(1) Les constructions 3° devront être effectuées avec la règle et le compas.

Ou bien la courbe C a, en ce point, un contact du second ordre avec son enveloppe.

Trouver la condition moyennant laquelle c'est la seconde de ces deux circonstances qui a lieu.

II. On considère, en particulier, le cas où les courbes C sont toutes homothétiques à une même courbe fixe C_0, représentée par l'équation $y = \varphi(x)$. Le centre d'homothétie est désigné par S, le rapport d'homothétie par k, l'homologue de l'origine O des coordonnées (c'est-à-dire le point placé par rapport à C comme O l'est par rapport à C_0) par O′, le point dont O est l'homologue (point placé par rapport à C_0 comme O l'est par rapport à C) par O_1.

On suppose que les coordonnées de S et le rapport k sont fonctions d'un même paramètre α. A quelles conditions doivent satisfaire ces fonctions pour que les courbes C aient chacune un contact du second ordre avec leur enveloppe?

Déterminer k en fonction de α de manière qu'il en soit ainsi :

1° Lorsqu'on donne C_0 et les expressions (en fonction de α) des coordonnées de S;

2° Lorsqu'on donne C_0 et les expressions des coordonnées de O′.

N. B. — Dans toutes les solutions précédentes, on s'attachera à interpréter géométriquement tout ce qui, parmi les résultats obtenus, sera susceptible d'une telle interprétation.

Sur quels résultats connus retombe-t-on en supposant que C_0 est un cercle?

III. Les courbes C étant toujours homothétiques d'une courbe fixe C_0, on suppose que les coordonnées du centre d'homothétie S et le rapport d'homothétie k sont développables en séries de Taylor autour de toute valeur réelle de α (k ne devenant, en outre, jamais nul) et que, de plus, k reprend la même valeur pour deux valeurs différentes α_1 et α_2 de α.

Montrer que si, dans ces conditions, les C ont chacune un contact du deuxième ordre avec leur enveloppe :

Ou bien pour une certaine valeur de α comprise entre α_1 et α_2, cette enveloppe a des branches infinies;

Ou bien le lieu des points O_1 définis plus haut a un point de rebroussement;

Ou bien cette dernière circonstance a lieu lorsqu'on remplace O par n'importe quel point fixe ω du plan autre que O (O_1 désignant alors le point qui est placé par rapport à C_0 comme ω l'est par rapport à C).

IV. Soit une famille de surfaces Σ représentées par l'équation générale

$$f(x, y, z, \alpha) = 0.$$

Si les équations $f = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} = 0$ représentent, pour chaque valeur de α, trois surfaces ayant une ligne commune :

Ou bien cette ligne est fixe;

Ou bien il y a, le long de cette ligne, contact du deuxième ordre entre l'enveloppée et l'enveloppe.

Condition pour que cette dernière circontance ait lieu. Cas où les surfaces Σ sont homothétiques à une surface fixe Σ_0. Montrer que celle-ci (ainsi que l'enveloppe) devra être développable. Que deviennent ici les solutions des deux problèmes posés dans la deuxième Partie?

V. On considère le cas où les courbes planes C sont non plus homothétiques, mais *égales* à une courbe fixe donnée C_0

$$y = \varphi(x).$$

Montrer qu'alors l'une des deux courbes dont le roulement l'une sur l'autre produit le mouvement de C doit être choisie d'une façon déterminée pour que C ait un contact du second ordre avec son enveloppe (l'autre courbe pouvant être quelconque).

Composition sur la Mécanique.

On considère dans un plan vertical deux droites indéfinies se coupant en un point O, l'une $x'Ox$ horizontale, l'autre $z'Oz$ verticale. Une tige AB homogène pesante d'épaisseur négligeable, de longueur $2l$ et de masse M est telle que ses extrémités restent constamment l'une A sur $x'Ox$, l'autre B sur $z'Oz$ et puissent passer sur ces droites d'un côté à l'autre du point O. Un point particulier D de la tige, dont les distances aux extrémités A et B restent invariable, est attiré par le point O proportionnellement à la distance; la valeur absolue de la force qui le sollicite est représentée par $\frac{Mg}{4\lambda}$ OD, g désignant l'accélération de la pesanteur et λ un nombre positif inférieur l. On appelle C le milieu de la tige et a le segment CD compté positivement dans le sens CA; enfin, on désigne par θ l'angle que forme la droite OC avec la verticale descendante.

1° On suppose que les liaisons auxquelles est soumise la tige AB soient sans frottement; on demande de déterminer les positions d'équilibre de cette tige et de rechercher parmi ces positions celles pour lesquelles l'équilibre est stable.

2° On suppose plus généralement que les droites $x'Ox$, $z'Oz$ soient dépolies, et que les coefficients de frottement de la tige sur ces droites soient très petits. On demande de déterminer en fonction des données et de ces coefficients de frottement une valeur approchée des angles θ correspondant aux limites des régions dans lesquelles peut être placée la tige sans que l'équilibre cesse de subsister.

3° On suppose dans ce qui suit que les droites $x'Ox$, $z'Oz$ soient parfaitement polies; on demande d'étudier le mouvement de la tige et de discuter la nature de ce mouvement suivant la position du point D et suivant les données initiales.

4° On suppose comme cas particulier que l soit égal à la longueur du pendule simple battant la seconde, que λ soit égal à $\frac{l}{2}$, et a égal à l; à l'origine du temps, la tige est verticale, le point B étant au-dessous de O. On demande quelle vitesse initiale il faut donner à la tige pour qu'elle s'approche constamment, sans jamais l'atteindre, d'une de ses positions d'équilibre; dans ces conditions, quel temps mettra le point B pour parvenir au point O?

5° On suppose dans le cas général que la tige est placée dans le voisinage d'une de ses positions d'équilibre stable et qu'on l'abandonne ensuite sans vitesse initiale; on demande de déterminer la durée de ses oscillations, supposées infiniment petites, et d'examiner les divers cas qui peuvent se présenter.