NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 376-383

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__376_1>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Caen.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Trouver une surface* S, *passant par la parabole définie, en coordonnées rectangulaires, par les équations*

$$x = \mathrm{R}, \qquad y^2 = 2az,$$

et telle que le plan tangent en l'un quelconque de ses points, M, *rencontre à la distance constante* R *de l'origine la droite menée de cette origine à la projection du point* M *sur le plan* OXY.

II. *Étant donnés trois axes rectangulaires* OX, OY, OZ, *déterminer les trajectoires orthogonales des cercles qui touchent* OZ *en* O *et qui ont leurs centres sur la droite*

$$z = 0, \qquad x = a;$$

montrer que ce sont des cercles situés dans des plans perpendiculaires à OXZ.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer l'équation*

$$x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} + 15 x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 61 x \frac{dy}{dx} + 64 y = \frac{8}{x^2} + \frac{33}{x}.$$

(Juillet 1907.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Déterminer l'intégrale de l'é-*

quation

$$z(x+z)\frac{\partial z}{\partial x} - y(y+z)\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

qui se réduit à $\sqrt{y}$ *pour* $x = 1$.

II. *On considère la surface déterminée, en coordonnées rectangulaires, par les équations*

$$\begin{aligned} x &= 3u + 3uv^2 - u^3, \\ y &= 3v + 3u^2v - v^3, \\ z &= 3u^2 - 3v^2. \end{aligned}$$

Chercher les lignes de courbure et montrer que ce sont des cubiques situées dans des plans parallèles à OX *ou à* OY, *suivant la série dont elles font partie.*

(Novembre 1907.)

Marseille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *Exposer la théorie du changement de variables dans une intégrale double.*

2° *Vérifier que les deux systèmes de sphères définies par les équations*

$$ax\lambda^2 + (x^2+y^2+z^2-a^2)\lambda + 2ay = 0,$$
$$x^2+y^2+z^2+a^2 = 2a(x+y)\cos\mu + 2az\sin\mu,$$

où λ *et* μ *sont des paramètres arbitraires, ont même enveloppe.*

Déterminer les lignes de courbure de cette enveloppe, les centres de courbure principaux en un point et le lieu de ces centres de courbure.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Déterminer tous les zéros et tous les pôles de la fraction rationnelle*

$$R(z) = \frac{z+1}{(z-t)(z^4-2z^3+2z^2-2z+1)},$$

où t *est un pôle simple dans le plan des* z, *et indiquer leurs ordres respectifs.*

2° *On isole chaque pôle de* R(z), y *compris* t, *dans un contour fermé simple ne contenant que ce pôle.*

Calculer les valeurs de l'intégrale

$$\int R(z)\,dz$$

le long des contours ainsi formés, le point z se déplaçant dans le sens positif.

3° *Les intégrales ainsi obtenues sont des fonctions de t. Démontrer que leur somme est nulle et que, de ce fait, on peut déduire la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle en t*

$$\frac{t+1}{t^4-2t^3+2t^2-2t+1}.$$

4° *Calculer la fonction primitive de cette fraction.*

(Novembre 1907.)

Montpellier.

Épreuve écrite. — *Une courbe C, rapportée à trois axes rectangulaires, est représentée par les équations*

$$x = 2abt,$$
$$y = a^2 \log t,$$
$$z = b^2 t^2,$$

où t est un paramètre variable.

1° *Calculer l'arc d'une portion de la courbe C.*

2° *Déterminer le rayon de courbure, le rayon de torsion et les coordonnées du centre de courbure en un point quelconque de la courbe C.*

3° *Un cylindre a ses génératrices parallèles à l'axe des Z, et pour directrice la courbe C; calculer la surface de ce cylindre comprise entre la courbe C, le plan xOy et deux génératrices.*

Épreuve pratique. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3}+2(1-a)x^2\frac{d^2y}{dx^2}+a^2\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)=bx+c,$$

Examiner ce que devient la solution générale dans le cas particulier où $a=1$.

(Novembre 1907

Paris.

ÉPREUVE THEORIQUE. — I. *On considère l'équation aux différentielles totales*

$$(1)\quad dz = (Az^2 + 2Bz + C)dx + (A_1 z^2 + 2B_1 z + C_1)dy,$$

où A, B, C, A_1, B_1, C_1 *sont des fonctions des deux variables indépendantes* x *et* y.

1° *On demande de former les conditions auxquelles doivent satisfaire les fonctions* A, B, C, A_1, B_1, C_1 *pour que l'équation* (1) *soit* complètement intégrable.

2° *Ces conditions étant supposées satisfaites, expliquer comment on achèvera l'intégration de cette équation, si l'on connaît une ou plusieurs intégrales particulières.*

EXEMPLE. — *Étant donnée une famille de courbes* Γ, *représentées dans un système d'axes rectangulaires par les deux équations*

$$x^2 - 2z^2 = a, \qquad 5y^3 - 5x^2z^3 + mx^3z + 4z^5 = b,$$

où a *et* b *sont des paramètres arbitraires et* m *un coefficient constant, on demande de déterminer ce coefficient* m *de façon que ces courbes* Γ *soient les trajectoires orthogonales d'une famille de surfaces, et de trouver cette famille de surfaces.*

II. *Soit* $f(x, y)$ *une fonction continue des deux variables* x *et* y. *Démontrer que l'intégrale double*

$$F(x, y) = \int\int f(u, v)\,du\,dv,$$

étendue à l'aire du triangle AMB, *limité par la bissectrice* OAB *de l'angle* xOy, *et par les parallèles aux axes menées par un point variable* M, *est une fonction des coordonnées* x *et* y *de ce point* M *qui satisfait à la relation*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} + f(x, y) = 0.$$

En déduire une intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + f(x, y) = 0$$

qui soit égale à x^2, et dont la dérivée $\frac{\partial z}{\partial x}$ soit égale à e^x lorsque le point M *est situé sur la bissectrice de l'angle xOy.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'intégrale définie*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2+3x+3}{(x+1)^3}\, e^{-x} \sin x \, dx.$$

(Juin 1907.)

I. ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *Déterminer les deux fonctions* $P(t)$ *et* $\varphi(t)$ *de telle façon que la fonction* y, *représentée par la formule*

$$y = (x-a)\int_b^x f(t)\, P(t)\, dt + (x-b)\int_a^x f(t)\, \varphi(t)\, dt.$$

soit une intégrale de l'équation différentielle

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$$

pour toutes les formes possibles de la fonction $f(x)$. Quelles sont les conditions qui déterminent cette intégrale particulière?

2° *Soient* R_1 *et* R_2 *les rayons de courbure principaux d'une surface de révolution* S *en un point* M *de cette surface,* R_1 *désignant le rayon de courbure correspondant au centre de courbure situé sur l'axe.*

On demande : 1° *de former l'équation différentielle à laquelle doit satisfaire la méridienne* C *de la surface* S *pour que le rapport* $\frac{R_1}{R_2}$ *soit égal à une fonction donnée de l'angle* φ *que fait avec l'axe le plan tangent au point* M *à la surface* S ; 2° *d'intégrer cette équation différentielle en supposant qu'on a*

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{m}{\cos\varphi} - 1,$$

m étant une constante donnée. Cas où $m = 0$.

II. Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale définie*

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos 3x}{\cos x + 2}\, dx.$$

(Octobre 1907.)

Poitiers.

Épreuve théorique. — I. *En un point* M(x, y, z) *d'une surface* S *on mène la normale* MN *qui rencontre en* N *le plan des* xy *et le plan tangent qui coupe ce même plan des* xy *suivant une droite* D :

1° *Soit* δ *la distance du point* N *à la droite* D; *on demande de former l'équation aux dérivées partielles des surfaces* S *pour lesquelles on a*

$$\delta = f(z),$$

f étant une fonction donnee.

2° *Montrer qu'en prenant comme nouvelle fonction inconnue,* Z, *une certaine fonction de* z *on peut ramener cette équation à la forme*

$$P^2 + Q^2 = 1 \qquad \left(P = \frac{\partial z}{\partial x},\ Q = \frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Intégrer en appliquant cette remarque.

3° *Former l'équation différentielle des projections orthogonales sur le plan des* xy, *des trajectoires orthogonales des sections de l'une des surfaces* S *par les plans* $z =$ const.; *intégrer cette équation et interpréter géométriquement le resultat.*

II. *A quelles conditions doivent être assujetties les constantes réelles* a *et* b *pour que l'intégrale définie*

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(\cos x + a)(\cos x - b)} \text{ ait un sens ?}$$

Calculer sa valeur en introduisant la variable complexe $z = e^{ix}$, *et appliquant la théorie des résidus.*

Épreuve pratique. — *Calculer l'aire de la partie du cercle osculateur en un point d'une ellipse, qui est extérieure à l'ellipse.* (Juillet 1907.)

Rennes.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Intégrer le système d'équations différentielles*

$$\frac{dx}{x - my} = \frac{dy}{y + mx} = \frac{dz}{z},$$

où m désigne une constante positive.

Les axes étant supposés rectangulaires, montrer que la courbe intégrale (C) *qui passe par le point* (M_0) *de coordonnées* a, 0, c *peut être représentée, en coordonnées semi-polaires, par les équations*

$$r = a e^{\frac{\theta}{m}},$$

$$z = \frac{c}{a} r.$$

Calculer l'arc M_0M *de la courbe* (C) *compté à partir de* M_0, *les coordonnées du centre de gravité de l'arc* M_0M, *puis la portion de la surface du cône*

$$z = \frac{c}{a} r$$

qui est comprise entre les génératrices OM_0, OM *et l'arc* M_0M *de* (C).

II. 1° *On considère la courbe* (C) *intégrale du problème précédent; montrer que la tangente et la normale principale font des angles constants avec* Oz.

Quelle propriété présente la courbe (C) *sur le cylindre projetant cette courbe sur le plan* xOy *?*

Est-il possible qu'une surface lieu d'une infinité de courbes (C) *admette toutes ces courbes comme lignes géodésiques ?*

2° *Lorsque le point* M_0 *décrit dans le plan* zOx *la droite*

$$z = px + q,$$

les courbes (C) *correspondantes engendrent une surface* S; *exprimer les coordonnées d'un point quelconque de cette surface en fonction des deux paramètres* a *et* θ.

Montrer que les lignes de la surface S *correspondant à* $\theta =$ const. *sont des droites, et que ces droites coupent toute courbe* (C) *génératrice sous un angle constant.*

Démontrer que le long d'une courbe (C) *la normale principale fait un angle constant avec la normale à la surface.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *L'expression* $\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x\sqrt{y^2 - x^2}} + \dfrac{dx}{x}$ *est une différentielle exacte.*

Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{(a,\,b)}^{(x,\,y)} \left(\frac{x\,dy - y\,dx}{x\sqrt{y^2 - x^2}} + \frac{dx}{x} \right)$$

prise le long d'un chemin allant du point (a, b) *au point* (x, y).

II. *Si* P *et* Q *sont des fonctions homogènes de même degré des deux variables* x *et* y, *l'expression*

$$\frac{Q\,dx - P\,dy}{Qx - Py}$$

est une différentielle exacte.

Appliquer ce résultat à l'intégration de l'équation différentielle

$$\left(y - \sqrt{y^2 - x^2}\right)dx - x\,dy = 0.$$

Indiquer d'autres procédés pour intégrer la même équation. (Novembre 1907.)