NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GEORGES LERY

Sur l’équilibre du corps solide

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 348-353

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__348_1>

[R4a]

SUR L'ÉQUILIBRE DU CORPS SOLIDE;

PAR M. GEORGES LERY.

Je me propose d'obtenir les conditions nécessaires et suffisantes d'équilibre d'un corps solide, en supprimant tous les théorèmes inutiles. Les hypothèses mécaniques indispensables se mettent d'elles-mêmes en évidence.

Les démonstrations faites au moyen de la Géométrie analytique sont aussi simples, bien qu'un peu plus longues à dire, par la Géométrie.

1. *Géométrie.* — On définira le moment d'un vecteur, ses coordonnées, la somme géométrique et le moment résultant d'un système de vecteurs.

On résoudra le problème suivant : *Construire un vecteur connaissant ses moments par rapport à deux points* A *et* B. Il y a une condition de possibilité, c'est que les deux moments aient des projections équipollentes sur la droite AB, et alors il y a une solution unique.

En effet, je puis prendre le point A comme origine; soient x, y, z les coordonnées de B; X, Y, Z les projections du vecteur cherché; L, M, N et L', M', N' les composantes de ses moments par rapport à A et B. Les équations du problème,

$$\begin{aligned} L' &= L - (yZ - zY), \\ M' &= M - (zX - xZ), \\ N' &= N - (xY - yX), \\ 0 &= LX + MY + NZ, \end{aligned}$$

donnent une solution en X, Y, Z si l'on a

$$Lx + My + Nz = L'x + M'y + N'z \neq 0.$$

2. *Cinématique.* — Après avoir étudié la vitesse et l'accélération d'un point, on démontrera les deux propriétés suivantes :

Théorème I. — *Pour que deux points restent à une distance invariable, il faut et suffit qu'à chaque instant les projections de leurs vitesses sur la droite qui les joint soient équipollentes.*

Car l'égalité

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = \text{const.}$$

entraîne

$$\begin{aligned} &(x - x')\frac{dx}{dt} + (y - y')\frac{dy}{dt} + (z - z')\frac{dz}{dt} \\ &\quad = (x - x')\frac{dx'}{dt} + (y - y')\frac{dy'}{dt} + (z - z')\frac{dz'}{dt}, \end{aligned}$$

et inversement.

Théorème II. — *Dans le mouvement d'un solide, il existe à chaque instant deux vecteurs* H *et* K *ayant pour origine un point arbitrairement choisi* A *et tels que la vitesse d'un point quelconque* M *du corps soit donnée par l'égalité géométrique*

$$V_M = H + \mathfrak{M}_M K. \tag{1}$$

En effet : 1° si les vitesses de plusieurs points M_1,

M_2, ... sont données par la formule (1), leurs distances mutuelles ne varient pas (théorème I).

2° Comme la position d'un solide est définie par celle de trois de ses points, il suffit de montrer qu'on peut déterminer H et K connaissant les vitesses de trois points A, B et C. On a

$$
\begin{aligned}
V_A &= H,\\
V_B &= H + \mathfrak{M}_B K,\\
V_C &= H + \mathfrak{M}_C K.
\end{aligned}
$$

La première égalité définit H; les autres s'écrivent

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{M}_B K &= V_B - V_A,\\
\mathfrak{M}_C K &= V_C - V_A;
\end{aligned}
$$

elles déterminent K, comme on l'a vu, car la condition de possibilité du problème est remplie.

Le théorème est exprimé en Géométrie analytique par les équations

$$
\begin{aligned}
V_x &= \xi + qz - ry,\\
V_y &= \eta + rx - pz,\\
V_z &= \zeta + py - qx,
\end{aligned}
$$

ξ, η, ζ étant les composantes de H, et p, q, r celles de $-$ K.

3. *Dynamique.* — On définit la masse d'un corps au moyen de la balance. Soit un point matériel en mouvement, de masse m, ayant à un certain moment l'accélération J. On dit que ce point est soumis à la force

$$F = mJ.$$

On justifie sans peine ces deux définitions par des faits d'expérience courante. L'étude des forces et des circonstances extérieures avec lesquelles elles sont en relation est en général du domaine de la Physique; elle donne lieu à un nombre considérable d'hypothèses. On n'étudie en Mécanique que les cas les plus simples.

Le postulat suivant est fondamental :

Principe de Galilée. — *Si un point matériel est soumis à un ensemble de circonstances extérieures qui, séparément, produiraient des forces* F_1, F_2, ..., *tout se passe comme s'il était soumis à une force unique* R, *égale à la somme géométrique des précédentes.*

On en déduit les équations du mouvement d'un point

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum X,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum Y,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum Z,$$

et l'équation des forces vives,

$$d\frac{1}{2}mv^2 = \sum (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

La quantité entre parenthèses s'appelle *travail élémentaire* de la force X, Y, Z.

Conditions d'équilibre du point matériel. — Pour que le point reste en repos, il faut qu'on ait

$$\sum X = \sum Y = \sum Z = 0.$$

Si ces conditions sont remplies, le point a un mouvement uniforme. Il reste en repos si sa vitesse initiale est nulle.

4. *Corps solide.* — On le regarde comme constitué de points matériels maintenus à des distances inva-

riables par les forces intérieures. On admet que ces dernières sont deux à deux égales et directement opposées (*principe de Newton*) et, par suite, qu'elles forment un système dont les six coordonnées sont nulles.

On en déduit sans peine les six équations du mouvement, qui ne contiennent que les forces extérieures,

$$\sum m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum \mathrm{X}, \qquad \ldots,$$

$$\frac{d}{dt} \sum m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = \sum \mathrm{L}, \qquad \ldots.$$

et l'équation des forces vives,

$$d \sum \frac{1}{2} m v^2 = \sum (\mathrm{X}\, dx + \mathrm{Y}\, dy + \mathrm{Z}\, dz).$$

Théorème III. — *Le travail élémentaire d'un système de forces appliquées à un solide ne dépend que des coordonnées du système, et non de chaque force en particulier.*

En effet, en appliquant le théorème II, on obtient

$$\mathrm{X}\, dx + \mathrm{Y}\, dy + \mathrm{Z}\, dz = (\xi \mathrm{X} + \eta \mathrm{Y} + \zeta \mathrm{Z} + p \mathrm{L} + q \mathrm{M} + r \mathrm{N})\, dt.$$

Le théorème peut être inexact si les points d'application sont mobiles dans le corps, car le théorème II ne s'applique plus.

Théorème IV. — *Pour qu'un corps soit en équilibre, il faut et il suffit que le système des forces extérieures ait ses six coordonnées nulles.*

1° Les conditions sont nécessaires, d'après les équations du mouvement.

2° Elles sont suffisantes, car le théorème des forces vives donne alors

$$\sum m (v^2 - v_0^2) = 0,$$

et, si v_0 est nulle pour chaque point,

$$\sum mv^2 = 0;$$

donc la vitesse v de chaque point est nulle.

5. On voit qu'il y a seulement deux principes à admettre : celui de Galilée et celui de Newton. Il est inutile de supposer qu'on peut transporter une force en un point quelconque de sa direction, qu'on peut introduire ou supprimer deux forces égales et directement opposées, qu'un corps n'est en équilibre sous l'action de deux forces que si elles sont égales et directement opposées.

On a en outre l'avantage, par cette méthode, de donner aux élèves, d'une façon simple, deux notions importantes : celle de la vitesse des points d'un solide en mouvement, et celle du travail des forces appliquées en des points bien déterminés du solide.