NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GASTON COTTY

Sur les surfaces de Steiner

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 337-348

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__337_0>

[M²4d]

SUR LES SURFACES DE STEINER;

PAR M. GASTON COTTY,
Élève à l'École Normale supérieure.

Soient f_1, f_2, f_3, f_4 quatre polynomes homogènes et du second degré par rapport à trois variables x, y, z, entre lesquels il n'existe aucune relation linéaire.

Posons

$$(1)\qquad \begin{cases} X = f_1(x, y, z), \\ Y = f_2(x, y, z), \\ Z = f_3(x, y, z), \\ T = f_4(x, y, z). \end{cases}$$

X, Y, Z et T sont les coordonnées d'un point d'une surface de Steiner (Σ).

L'étude de ces surfaces, faite par Clebsch (*Journal de Crelle*, 1867), a déjà fait l'objet d'une Note de M. Lacour ([1]), qui a étudié le cas général.

Je me propose de faire la discussion de la nature de ces surfaces en me plaçant à un point de vue différent de celui de Clebsch.

A toute surface de Steiner (Σ) on peut faire correspondre le faisceau ponctuel du troisième ordre (F) ayant pour coniques de base, rapportées à un triangle de référence quelconque dans un plan auxiliaire, les courbes $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$, $f_4 = 0$, les sections planes de (Σ) ayant pour images sur ce plan les coniques de (F) et un changement du tétraèdre de réfé-

([1]) *Nouvelles Annales*, 1898, p. 437 et 499.

rence auquel est rapporté (Σ) ayant simplement pour effet de remplacer les expressions de O, Y, Z et T par les premiers membres des équations de quatre autres coniques quelconques du faisceau (F) n'appartenant pas à un même réseau ponctuel.

Ceci rappelé, nous voyons que (Σ) est caractérisée par le faisceau ponctuel (F), ou mieux par le faisceau tangentiel linéaire (Φ), contravariant du faisceau (F).

C'est à la discussion de la nature de ce faisceau tangentiel que nous rapporterons la classification des surfaces de Steiner. La discussion sera ainsi plus complète et bien plus simple, particulièrement en ce qui concerne les surfaces cubiques réglées.

La signification géométrique de (Φ) résulte du théorème suivant, que je rappellerai en quelques mots :

Les coniques (Γ) *du faisceau* (Φ) *sont les images des lignes asymptotiques de la surface.*

En effet, d'un point quelconque m, on peut mener aux courbes (Γ) deux tangentes formant un faisceau en involution. Il existe donc deux droites (les rayons doubles de l'involution précédente), D_1 et D_2, formant une conique harmoniquement circonscrite à toutes les coniques (Γ) et appartenant par conséquent au faisceau (F). Cette conique ($D_1 + D_2$) est l'image d'une section de Σ par un plan (Π) passant par le point M dont m est l'image. On voit aisément que cette section a un point double en M et que (Π) est le plan tangent à Σ en M.

Une droite ne pouvant être l'image que d'une conique ou d'une droite de (Σ), la section de (Σ) par le plan tangent (Π) ne peut se composer que de deux coniques, ou une droite et une conique, ou deux droites. Les deux asymptotiques en M seront tangentes à ces deux courbes, et leurs images seront tangentes en m à (D_1) et (D_2). On sait que (D_1) et (D_2) sont les tangentes en m aux deux coniques du faisceau (Φ) passant par m, et l'on en déduit immédiatement que les coniques (Γ) sont images des asymptotiques de (Σ).

Quand D_1 et D_2 sont confondues pour certaines positions particulières de m, elles correspondent en général à des lignes doubles ou à des sections par des plans tangents singuliers touchant Σ suivant une conique double.

Nous sommes conduits à distinguer six cas fondamentaux suivant que les coniques du faisceau Φ sont :

1° Tangentes à quatre droites distinctes;

2° Tangentes à deux droites et tangentes à une troisième droite en un point fixe;

3° Osculatrices en un point et tangentes à une droite;

4° Bitangentes;

5° Surosculatrices en un point;

6° Décomposables en couples de points, cas sans intérêt qui correspond aux surfaces du second degré réglées, que nous laisserons de côté.

I. *Les coniques* (Γ) *du faisceau* (Φ) *sont tangentes à quatre droites distinctes.*

C'est le cas étudié dans la Note précédemment citée. La surface (Σ) est du quatrième degré, à trois lignes doubles, quatre coniques singulières (dans quatre plans tangents singuliers); ses lignes asymptotiques sont des quartiques unicursales.

II. *Les coniques* (Γ) *sont tangentes à deux droites* (D) *et* (D'), *et tangentes à une troisième droite* (Δ) *en un point fixe* M.

D et D′ se coupent en K. Nous prendrons comme côtés du triangle de référence auquel sont rapportées les coniques (Γ) : KM, sa conjuguée par rapport à (D) et (D′), et (Δ).

Les équations de (D), (D′) et (Δ) seront respectivement

$$(D) \qquad y + z = 0,$$
$$(D') \qquad y - z = 0,$$
$$(\Delta) \qquad x = 0.$$

L'équation tangentielle des coniques (Γ) est alors

$$2\lambda u w + (w^2 - v^2) = 0;$$

en coordonnées ponctuelles,

$$\lambda^2 y^2 + x^2 - 2\lambda z x = 0.$$

Les coniques du faisceau (F) étant harmoniquement circonscrites aux coniques (Γ) de (Φ), on forme aisément l'équation du faisceau (F) :

$$A x^2 + B(y^2 + z^2) + 2C xy + 2D yz = 0.$$

On peut donc trouver un tétraèdre de référence tel que (Σ) ait pour équations

$$\begin{cases} X = x^2, \\ Y = y^2 + z^2, \\ Z = 2xy, \\ T = 2yz. \end{cases}$$

L'équation ponctuelle de (Σ) est alors

$$Z^4 - 4XYZ^2 + 4X^2T^2 = 0.$$

Elle est du quatrième degré, a un point triple ($X = Y = Z = 0$) par lequel passent deux lignes doubles ($Z = 0$, $T = 0$) et ($X = 0$, $Z = 0$). Le long de cette dernière, la surface a deux nappes qui touchent le plan $X = 0$.

Les sections planes sont des quartiques unicursales ayant un point double sur $(Z = 0,\ T = 0)$ et deux branches tangentes au plan $X = 0$ sur $(X = 0, Z = 0)$. (Σ) possède deux plans tangents singuliers touchant la surface suivant des coniques doubles ayant pour images (D) et (D').

Les asymptotiques ayant pour images

$$\lambda^2 y^2 - 2\lambda zx + x^2 = 0,$$

on forme aisément les expressions des coordonnées d'un point en fonctions homogènes de x et y :

$$\left\{\begin{aligned} X &= \lambda^2 x^4, \\ Y &= \lambda^2 x^2 y^2 + (\lambda^2 y^2 + x^2)^2, \\ Z &= 2\lambda^2 x^3 y, \\ T &= \lambda xy(\lambda^2 y^2 + x^2). \end{aligned}\right.$$

Ce sont des quartiques tangentes à la droite $(X = 0,\ Z = 0)$ au point triple de la surface et aux deux coniques singulières.

III. *Les coniques du faisceau* (Φ) *sont osculatrices en un point* (M) *et tangentes à une droite* (Δ).

Nous choisissons ainsi le triangle de référence auquel nous rapportons (Φ) : $x = 0$ est la tangente commune aux coniques en M, $Z = 0$ est la droite Δ, $y = 0$ est une droite passant par M et formant un triangle avec les deux droites précédentes.

L'équation tangentielle des coniques de (Φ) est

$$v^2 - 2uv + 2\lambda vw = 0,$$

d'où l'équation du faisceau contravariant (F) :

$$Ax^2 + B(y^2 + 2zx) + Cz^2 + 2Dxy = 0.$$

Les coordonnées d'un point de (Z) sont

$$\begin{cases} X = x^2, \\ Y = y^2 + 2zx, \\ Z = z^2, \\ T = 2xy, \end{cases}$$

et l'équation réduite de (Σ) est alors

$$(4XY - T^2)^2 - 64X^3Z = 0;$$

(Σ) est du quatrième degré, à une droite double $(X = 0,\ T = 0)$ correspondant à $x = 0$, le long de laquelle la surface touche le plan $X = 0$.

Elle a un seul plan tangent singulier $(z = 0)$ touchant (Σ) suivant la conique double :

$$(z = 0,\ 4XY - T^2 = 0).$$

Un plan passant par la droite double coupe la surface suivant une conique tangente à cette droite et tangente à $z = 0$ au point où son plan coupe la conique singulière.

Les sections planes sont des quartiques unicursales ayant un point singulier sur la droite double

$$(X = 0,\ T = 0).$$

Les lignes asymptotiques ont pour images les coniques

$$(\lambda x + y)^2 - 2xz = 0,$$

d'où les expressions des coordonnées d'un point se déduisent aisément :

$$\begin{cases} X = x^2, \\ Y = y^2 + (\lambda x + y)^2, \\ Z = \dfrac{(\lambda x + y)^4}{4x^2}, \\ T = 2xy. \end{cases}$$

Ce sont des courbes du quatrième degré unicursales, tangentes à la conique singulière et présentant un point singulier sur $X = 0$, $T = 0$.

IV. *Les coniques du faisceau* (Φ) *sont bitangentes.*

Elles sont tangentes aux deux droites $x = 0$, $y = 0$ à leurs points d'intersection avec $z = 0$. L'équation générale des coniques (Γ) est

$$uv - \mu w^2 = 0$$

ou, en coordonnées ponctuelles,

$$xy = \lambda z^2.$$

L'équation du faisceau (F) se forme aisément; on trouve

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxz + 2Dyz = 0,$$

ce qui conduit à poser

$$\begin{cases} X = x^2, \\ Y = y^2, \\ Z = 2xz, \\ T = 2yz, \end{cases}$$

X, Y, Z, T étant les coordonnées d'un point variable de (Σ) par rapport à un certain tétraèdre de référence. L'équation réduite de (Σ) est

$$YZ^2 - XT^2 = 0;$$

(Σ) est une surface réglée du troisième degré admettant comme directrice rectiligne double la droite ($Z = 0$, $T = 0$) et comme directrice simple la droite ($X = 0$, $Y = 0$).

Inversement, il est aisé de montrer que toute surface du troisième degré réglée, ayant ses deux directrices distinctes, a une équation de cette forme et est une surface de Steiner.

Les génératrices rectilignes de (Σ) ont pour images des droites passant par le point $(x = 0, y = 0)$.

Les lignes asymptotiques de (Σ) se composent de ces génératrices et des courbes ayant pour images les coniques

$$xy - \lambda z^2 = 0.$$

Ce sont des quartiques :

$$\left\{\begin{aligned} X &= x^4, \\ Y &= \lambda^2 z^4, \\ Z &= 2x^3 z, \\ T &= 2\lambda z^3 x. \end{aligned}\right.$$

Elles passent par les deux points $(X = 0, Z = 0, T = 0)$ et $(Y = 0, Z = 0, T = 0)$ de la directrice double et sont tangentes en ces points respectivement aux génératrices $(X = 0, Z = 0)$ et $(Y = 0, T = 0)$ de (Σ). Ce sont les courbes d'intersection de (Σ) et des quadriques

$$XY - \frac{\lambda^2}{4} ZT = 0,$$

l'intersection complète se composant en réalité d'une asymptotique et des droites $(X = 0, Z = 0)$ et $(Y = 0, T = 0)$.

V. *Les coniques du faisceau* (Φ) *sont surosculatrices en un point.*

Soit $(x = 0, y = 0)$ le point de surosculation et $x = 0$ la tangente en ce point; l'équation tangentielle de (Φ) est

$$v^2 - \mu w^2 - uw = 0$$

ou, en coordonnées ponctuelles,

$$y^2 - 4xz + \lambda x^2 = 0.$$

Le faisceau (F) a pour équation

$$Ax^2 + B(y^2 + 2zx) + 2Cyz + 2Dxy = 0.$$

Posons

$$\begin{cases} X = x^2, \\ X = y^2 + 2zx, \\ Z = 2yz, \\ T = 2xy. \end{cases}$$

X, Y, Z, T sont les coordonnées d'un point de (Σ) par rapport à un certain tétraèdre de référence. (Σ) a pour équation ponctuelle réduite

$$T^3 - 4X(YT - 2XZ) = 0.$$

Elle a une seule ligne double ($X = 0$, $T = 0$) et est réglée.

C'est une surface réglée du troisième ordre où les deux directrices sont confondues (surface de Cayley). Et, inversement, on prouve facilement que toute surface de Cayley peut être ramenée à cette forme type e est une surface de Steiner.

Les sections planes sont des cubiques ayant un point double sur la ligne double.

Les génératrices rectilignes correspondent aux droites passant par le point ($x = y = 0$).

Les asymptotiques sont les génératrices rectilignes et les courbes ayant pour images les coniques de (Φ) :

$$y^2 - 4xz + \lambda x^2 = 0.$$

Exprimons les coordonnées d'un point par des fonctions homogènes de deux paramètres; nous avons

$$\begin{cases} X = 2x^3, \\ Y = 3xy^2 + \lambda x^3, \\ Z = y(\lambda x^2 + y^2), \\ T = 4x^2y. \end{cases}$$

Ce sont des cubiques gauches tangentes au point $(X=Y=Z=0)$ à la directrice double $(X=0, T=0)$ de la surface (Σ).

VI. *Autres cas possibles pour les coniques* (Φ).

On voit que f_1, f_2, f_3, f_4 sont linéaires séparément par rapport aux variables x, y et z prises séparément et que les coniques de (F) passent par deux points fixes. Les surfaces (Σ) sont des quadriques réglées.

Remarque I. — Dans les cas IV et V seulement, les coniques de (F) passent par un seul point fixe. C'est la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface définie par les équations (1) soit du troisième degré et réglée. Il est aisé de traduire ce résultat analytiquement.

Cherchons la condition nécessaire et suffisante pour que, la condition précédente étant remplie, la surface cubique ait ses deux directrices confondues.

On sait que les coniques (Φ) sont surosculatrices, condition nécessaire et suffisante. La propriété géométrique correspondante pour le faisceau (F) contravariant de (Φ) est la suivante : les coniques de (F) réduites à une droite double sont telles que cette droite passe par le point de surosculation, et inversement toute droite passant par ce point est conique double de (F). Cette propriété est caractéristique, comme il est facile de le voir géométriquement ou sur les diverses équations trouvées pour (F). Traduisons ceci analytiquement :

Exprimons d'abord que (Σ) est du troisième degré; les coniques $f_1=0$, $f_2=0$, $f_3=0$, $f_4=0$ passent par un point fixe; par une transformation homographique convenable effectuée sur x, y et z, on fait disparaître les termes en z^2 dans f_1, f_2, f_3, f_4. Le point de surosculation est alors $x = y = 0$. Et il nous reste à exprimer que $(\alpha x + \beta y)^2$ est une conique du faisceau (F), quels que soient α et β.

On a

$$f_i = a_i x^2 + b_i y^2 + 2c_i yz + 2d_i zx + 2e_i xy \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

L'équation de (F) est

$$A f_1 + B f_2 + C f_3 + D f_4 = 0.$$

Identifions ceci avec

$$(\alpha x + \beta y)^2.$$

On obtient

$$\begin{aligned}
A a_1 + B a_2 + C a_3 + D a_4 - \alpha^2 &= 0,\\
A b_1 + B b_2 + C b_3 + D b_4 - \beta^2 &= 0,\\
A c_1 + B c_2 + C c_3 + D c_4 - \alpha\beta &= 0,\\
A d_1 + B d_2 + C d_3 + D d_4 &= 0,\\
A e_1 + B e_2 + C e_3 + D e_4 &= 0,
\end{aligned}$$

ce qui exige que l'on ait

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \alpha^2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \beta^2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \alpha\beta \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & 0 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

équation du second degré en $\frac{\beta}{\alpha}$ devant avoir une racine double. D'où la condition cherchée :

$$\left[\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{vmatrix}\right]^2 + 4 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Remarque II. — Nous ferons encore remarquer que, pour les surfaces du troisième degré réglées, le degré de leurs asymptotiques est caractéristique de leur nature; ce degré est égal à 4 pour les surfaces à directrices distinctes et à 3 pour les surfaces de Cayley.