MICHEL PETROVITCH

Procédé élémentaire d'application des intégrales définies réelles aux équations algébriques et transcendantes

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__1_0>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

[E5]

PROCÉDÉ ÉLÉMENTAIRE D'APPLICATION DES INTÉGRALES DÉFINIES REELLES AUX ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES ET TRANSCENDANTES;

PAR M. MICHEL PETROVITCH,

à Belgrade (Serbie).

I. — SUR UNE INTÉGRALE RÉELLE DISCONTINUE.

1. Soit $\varphi(t)$ une fonction réelle pour t réel, continue dans un intervalle réel donné (a, b) et telle que l'intégrale

$$(1) \qquad g_n = \int_a^b \varphi(t) \cos nt \, dt$$

ait un sens pour toute valeur entière positive ou nulle de n.

J'envisage l'intégrale définie

$$(2) \qquad \mathrm{I}(x) = \int_a^b \varphi(t) \log(1 - 2x \cos t + x^2) \, dt,$$

qui, en vertu du développement

$$(3) \qquad \log(1 - 2x \cos t + x^2) = -2 \sum_1^\infty \frac{x^n \cos nt}{n},$$

sera une fonction $\lambda(x)$ de x, donnée pour $|x|$ suffisamment petit par le développement

$$\lambda(x) = -2\sum_{1}^{\infty} \frac{g_n x^n}{n}, \tag{4}$$

ou bien par l'intégrale

$$\lambda(x) = -2\int_a^b \frac{\mu(x)}{x}\,dx \tag{5}$$

avec

$$\mu(x) = \sum_{1}^{\infty} g_n x^n. \tag{6}$$

Soit R le rayon de convergence de la série (6) [dont la détermination se réduit à celle de l'intégrale (1) pour n très grand]. Alors, la série (3) étant uniformément convergente pour $|x| \leqq 1$:

1° Si $R \geqq 1$, l'intégrale $I(x)$ pour $|x| < 1$ coïncidera avec la fonction $\lambda(x)$; d'autre part, l'identité

$$\log(1 - 2x\cos t + x^2) = 2\log x + \log\left(1 - \frac{2}{x}\cos t + \frac{1}{x^2}\right)$$

montre que, pour $|x| > 1$, $I(x)$ coïncidera avec la fonction

$$\Omega(x) = 2g_0 \log x + \lambda\left(\frac{1}{x}\right). \tag{7}$$

2° Si $R < 1$, $I(x)$ coïncide avec $\lambda(x)$ pour $|x| < R$ et avec $\Omega(x)$ pour $|x| > \frac{1}{R}$.

L'intégrale $I(x)$ est donc une fonction discontinue de x, coïncidant tantôt avec $\lambda(x)$, tantôt avec $\Omega(x)$, suivant que le point x se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur d'une certaine circonférence ou d'une certaine couronne ayant l'origine comme centre.

2. Un cas particulièrement intéressant pour ce qui suit se présente lorsque la fonction $\varphi(t)$ et les limites a et b de l'intégrale $I(x)$ sont telles que l'intégrale (1) soit constamment nulle dès que l'entier n dépasse une certaine valeur p, tandis que pour $n \leqq p$ elle soit déterminée, finie et différente de zéro. Nous dirons, dans ce cas, pour abréger, qu'une telle fonction *satisfait à la condition* $[\varphi, a, b, p]$.

Ainsi, $\varphi =$ const. satisfait à la condition

$$[\varphi, 0, 2k\pi, 0].$$

La fonction

$$\varphi = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^k \qquad (k = \text{entier positif})$$

satisfait à la condition $[\varphi, 0, \infty, k-1]$.

La fonction

$$\varphi = \left(\frac{\sin ht}{t}\right)^2 \qquad (h = \text{entier positif})$$

satisfait à la condition $[\varphi, 0, \infty, 2h-1]$.

Toute fonction continue $\varphi(t)$ admettant 2π comme période, ne s'annulant pas pour $t = 0$ et dont le développement en série trigonométrique ne contient pas de cosinus satisfait à la condition $[\varphi, 0, 2\pi, 0]$, etc.

Dans tous ces cas, la fonction $\lambda(x)$ se réduit au polynome de degré p en x

$$\lambda(x) = -2\left(g_1 x + \frac{g_2}{2}x^2 + \ldots + \frac{g_p}{p}x^p\right), \tag{8}$$

et l'on a $R = \infty$. Si, en particulier, la fonction φ satisfait à la condition $[\varphi, a, b, 0]$, on a $\lambda(x) = 0$, et, par suite,

$$I(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } |x| \leqq 1, \\ 2g_0 \log x & \text{pour } |x| > 1. \end{cases} \tag{9}$$

3. Dans le cas où, les limites de l'intégrale étant o et 2π, la fonction continue $\varphi(t)$ admet la période 2π, de sorte que

$$(10)\qquad \varphi(t) = A_0 + \sum_1^\infty A_n \sin nt + \sum_1^\infty B_n \cos nt,$$

on aura

$$(11)\qquad g_0 = 2\pi A_0, \qquad g_n = \pi B_n,$$

et la fonction correspondante $\lambda(x)$ peut s'écrire

$$(12)\qquad \lambda(x) = -2\pi \int_0^x \frac{\Phi(x)}{x}\,dx$$

avec

$$(13)\qquad \Phi(x) = \sum_1^\infty B_n x^n.$$

Ainsi, lorsque $\varphi(t)$ est le coefficient de i dans une expression $\psi(e^{ti})$, $\psi(z)$ étant une fonction de z holomorphe pour $|z| < 1$, on aura $A_0 = 0$, $B_n = 0$, et, par suite,

$$g_0 = 0, \qquad \lambda(x) = 0.$$

Lorsque $\varphi(t)$ est la partie réelle de $\psi(e^{ti})$, on trouve aisément

$$(14)\qquad g_0 = 2\pi\,\psi(0), \qquad \lambda(x) = -2\pi \int_0^x \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x}\,dx,$$

et le rayon R sera au moins égal à 1. En faisant donc

$$(15)\qquad \psi(z) = -\frac{1}{2\pi} z f'(z),$$

$f(z)$ étant une fonction holomorphe pour $|z| < 1$, on aura

$$g_0 = 0, \qquad \lambda(x) = f(x),$$

ce qui donne, d'une manière bien élémentaire, une solution du problème suivant :

L'intégrale $I(x)$ *étant prise entre les limites* o *et* 2π, *déterminer la fonction* $\varphi(t)$ *correspondant à une fonction* $\lambda(x)$ *donnée, holomorphe pour* $|x| < 1$.

Cette solution consisterait à prendre pour $\varphi(t)$ la partie réelle de l'expression $-\frac{1}{2\pi}z\lambda'(z)$ pour $z = e^{ti}$. La fonction $\varphi(t)$, correspondant à une fonction $\mu(t)$ donnée, serait égale à la partie réelle de $\frac{1}{\pi}\mu(e^{ti})$.

Remarquons aussi que l'intégrale $I(x)$ est égale au double de l'intégrale de la même forme, mais prise entre les limites o et π.

II. — Différence entre le nombre de zéros et de pôles d'une fonction méromorphe dans une circonférence donnée.

Soit $f(z)$ une fonction méromorphe à l'intérieur et sur la circonférence d'un cercle C de rayon r, ayant l'origine comme centre, réelle pour z réel et ne s'annulant pas pour $z = 0$. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des zéros et $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ ses pôles à l'intérieur de C, en supposant qu'aucun d'eux ne se trouve sur C et en comptant chaque zéro et chaque pôle autant de fois qu'indique son degré de multiplicité.

Envisageons l'intégrale définie

$$(16) \qquad H(r) = \int_a^b \varphi(t)\,F(r, t)\,dt,$$

où $F(r, t)$ désigne la partie réelle de $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ pour $z = re^{ti}$.

Comme l'on peut écrire

$$(17)\qquad \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_1^n \frac{1}{z-\alpha_k} - \sum_1^m \frac{1}{z-\beta_k} + \chi(z),$$

$\chi(z)$ étant holomorphe dans C et sur C, les identités

$$(18)\qquad \text{partie réelle de } f(re^{ti}) = \tfrac{1}{2}\,[f(re^{ti}) + f(re^{-ti})],$$

$$(19)\qquad \frac{1}{2}\left(\frac{re^{ti}}{re^{ti}-\alpha} + \frac{re^{-ti}}{re^{-ti}-\alpha}\right) = \frac{1-\dfrac{\alpha}{r}\cos t}{1-\dfrac{2\alpha}{r}\cos t + \left(\dfrac{\alpha}{r}\right)^2}$$

conduisent à

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} F(r,t) = {} & \sum_1^n \frac{1-\dfrac{\alpha_k}{r}\cos t}{1-\dfrac{2\alpha_k}{r}\cos t + \left(\dfrac{\alpha_k}{r}\right)^2} \\ & - \sum_1^m \frac{1-\dfrac{\beta_k}{r}\cos t}{1-\dfrac{2\beta_k}{r}\cos t + \left(\dfrac{\beta_k}{r}\right)^2} + \psi(r,t), \end{aligned}\right.$$

où $\psi(r, t)$ désigne la partie réelle de $z\chi(z)$ pour $z = re^{ti}$. Par suite, on aura

$$(21)\qquad H(r) = \sum_1^n B\left(\frac{\alpha_k}{r}\right) - \sum_1^m B\left(\frac{\beta_k}{r}\right) + U(r),$$

où $B(x)$ représente l'intégrale définie

$$(22)\qquad B(x) = \int_a^b \varphi(t)\,\frac{1-x\cos t}{1-2x\cos t + x^2}\,dt,$$

et où

$$(23)\qquad U(r) = \int_a^b \varphi(t)\,\psi(r,t)\,dt.$$

Or, l'identité

$$\frac{1-x\cos t}{1-2x\cos t+x^2} = 1 - \frac{x}{2}\,\frac{d}{dx}\log(1-2x\cos t + x^2)$$

fait voir qu'en mettant à part les valeurs $|x| = 1$, on aura pour toute valeur de x

$$B(x) = g_0 - \frac{x}{2} \frac{dI}{dx}.$$

Il s'ensuit, d'après les propriétés de l'intégrale $I(x)$, que pour toute valeur de x à l'intérieur d'une certaine circonférence C_1 on aura [formules (5) et (7)]

$$B(x) = g_0 + \mu(x),$$

et, pour toute valeur de x à l'extérieur d'une certaine circonférence C_2, on aura

$$B(x) = -\mu\left(\frac{1}{x}\right),$$

$\mu(x)$ étant donnée par (6); les rayons R_1 et R_2 de C_1 et C_2 ont pour valeurs

$$R_1 = \text{plus petite des valeurs } 1 \text{ et } R,$$
$$R_2 = \text{plus grande des valeurs } 1 \text{ et } \frac{1}{R},$$

R étant le rayon de convergence de la série (6).

Choisissons maintenant pour $\varphi(t)$ une fonction quelconque satisfaisant à la condition $[\varphi, a, b, 0]$; on aura

$$\mu(x) = 0, \qquad R = \infty,$$

et, comme les deux circonférences C_1 et C_2 coïncident alors avec C, on aura

$$B(x) = g_0 \quad \text{pour} \quad |x| < 1,$$
$$B(x) = 0 \quad \text{pour} \quad |x| > 1;$$

par suite,

$$(24) \qquad \left\{ \begin{aligned} \sum_1^n B\left(\frac{\alpha_k}{r}\right) &= n g_0, \\ \sum_1^m B\left(\frac{\beta_k}{r}\right) &= m g_0. \end{aligned} \right.$$

D'autre part, la fonction $\chi(z)$ étant pour $|z| \leqq r$ développable en série

$$\chi(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots,$$

on aura

$$\psi(r, t) = 2\sum_{1}^{\infty} b_n r^{n+1} \cos(n+1)t,$$

et, par suite,

$$U(r) = 2\sum_{1}^{\infty} b_n g_{n+1} r^{n+1} = 0, \tag{25}$$

de sorte que l'intégrale $H(r)$ se réduit à la valeur $(n-m)g_0$.

D'où le résultat suivant :

La différence entre le nombre des zéros et celui des pôles de $f(z)$ est égale à la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{g_0}\int_a^b \varphi(t)\,F(r, t)\,dt,$$

où $F(r, t)$ désigne la partie réelle de $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ pour $z = re^{ti}$ et où $\varphi(t)$ est une fonction quelconque satisfaisant à la condition $[\varphi, a, b, 0]$.

Ainsi, par exemple, cette différence sera représentée par l'intégrale

$$\frac{1}{g_0}\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} F(r, t)\,dt,$$

dans quel cas on aura

$$g_0 = \frac{\pi}{2},$$

ou bien par une intégrale quelconque de la forme

$$\frac{1}{g_0}\int_0^{2\pi} \varphi(t)\,F(r, t)\,dt,$$

$\varphi(t)$ étant une fonction continue, admettant 2π comme période, ne s'annulant pas pour $t = 0$ et dont le développement en série de Fourier ne contient pas de cosinus; dans ce cas on aura

$$g_0 = \pi\varphi(0).$$

En prenant dans la dernière intégrale $\varphi(t) = 1$ on retrouve la formule

$$n - m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(r, t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} F(r, t)\,dt.$$

III. — Rapport des produits des modules des zéros et des pôles.

Considérons la fonction précédente $f(z)$ et partons de

$$(26)\quad \log\frac{f(z)}{f(0)} = \sum_1^n \log\left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) - \sum_1^m \log\left(1 - \frac{z}{\beta_k}\right) + \xi(z),$$

où $\xi(z)$ sera holomorphe à l'intérieur et sur la circonférence C et s'annule pour $z = 0$.

Formons l'intégrale

$$(27)\qquad K(r) = \int_a^b \varphi(t)\,M(r, t)\,dt,$$

où

$$(28)\qquad M(r, t) = \log|f(z)| \qquad \text{pour} \qquad z = re^{ti}.$$

Les identités

$$(29)\qquad M(r, t) = \tfrac{1}{2}[\log f(re^{ti}) + \log f(re^{-ti})],$$

$$(30)\qquad \left\{\begin{aligned} &\log\left(1 - \frac{re^{ti}}{\alpha}\right) + \log\left(1 - \frac{re^{-ti}}{\alpha}\right) \\ &\quad = \log\left[1 - \frac{2r}{\alpha}\cos t + \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2\right] \end{aligned}\right.$$

conduisent à

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} M(r,t) = {} & \frac{1}{2}\sum_1^n \log\left[1 - \frac{2r}{\alpha_k}\cos t + \left(\frac{r}{\alpha_k}\right)^2\right] \\ & - \frac{1}{2}\sum_1^m \log\left[1 - \frac{2r}{\beta_k}\cos t + \left(\frac{r}{\beta_k}\right)^2\right] \\ & + \log f(0) + \psi(r,t), \end{aligned}\right.$$

où

$$(32)\quad \psi(r,t) = \sum_1^\infty c_n r^n \cos nt,$$

c_n désignant les coefficients du développement

$$\xi(z) = \sum_1^\infty c_n z^n,$$

convergent pour $z \leqq r$.

Par suite, l'intégrale $K(r)$ aura la valeur

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} K(r) = {} & \frac{1}{2}\sum_1^n I\left(\frac{r}{\alpha_k}\right) - \frac{1}{2}\sum_1^m I\left(\frac{r}{\beta_k}\right) \\ & + \log f(0)\int_a^b \varphi(t)\,dt \\ & + \int_a^b \varphi(t)\,\psi(r,t)\,dt. \end{aligned}\right.$$

Choisissons maintenant pour $\varphi(t)$ une fonction quelconque satisfaisant à la condition $[\varphi, a, b, 0]$; les formules (9) montrent que

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} \sum_1^n I\left(\frac{r}{\alpha_k}\right) &= 2g_0 \log\frac{r^n}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}, \\ \sum_1^m I\left(\frac{r}{\beta_k}\right) &= 2g_0 \log\frac{r^m}{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m}, \end{aligned}\right.$$

et comme, en vertu de (32), on a

$$(35)\qquad \int_a^b \varphi(t)\,\psi(r,t)\,dt = \sum_1^\infty c_n g_n r^n = 0,$$

la valeur de $K(r)$ se réduit à

$$(36)\qquad K(r) = g_0 \log\left[f(0)\,r^{n-m}\,\frac{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\right].$$

En égalant à $K(r)$ la partie réelle du second membre de (36), on est conduit au résultat suivant :

Quelle que soit la fonction $\varphi(t)$ satisfaisant à la condition $[\varphi, a, b, 0]$, *et* $M(r, t)$ *désignant le logarithme du module de $f(z)$ le long du cercle de rayon r, l'intégrale définie*

$$K(r) = \int_a^b \varphi(t)\,M(r,t)\,dt$$

aura pour valeur

$$(37)\qquad g_0 \log\left|\,f(0)\,r^{n-m}\,\frac{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\right|.$$

Tel est, par exemple, le cas de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,M(r,t)\,dt,$$

ou d'une intégrale quelconque de la forme

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t)\,M(r,t)\,dt,$$

$\varphi(t)$ étant une fonction continue à période 2π à laquelle correspondrait le développement

$$\varphi(t) = A_0 + A_1 \sin t + A_2 \sin 2t + \ldots.$$

En prenant dans ce dernier cas

$$A_0 = 1, \qquad A_1 = A_2 = A_3 = \ldots = 0,$$

on retrouve le théorème de M. Jensen pour le cas où $f(z)$ est réel pour z réel.

IV. — Fonctions symétriques et asymétriques des zéros.

1. Soit $f(z)$ un polynome en z de degré n et envisageons l'intégrale précédente

$$K(r) = \int_a^b \varphi(t)\, M(r, t)\, dt.$$

Les identités (29), (30) et

$$\log \frac{f(z)}{f(0)} = \sum \log\left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) \tag{38}$$

conduisent directement à

$$K(r) = \frac{1}{2} \sum_1^n I\left(\frac{r}{\alpha_k}\right) + g_0 \log f(0). \tag{39}$$

Or, d'après les propriétés de l'intégrale $I(x)$, si α_1, α_2, ..., α_m sont les zéros de $f(z)$ compris à l'intérieur de la circonférence c de rayon r, et α_{m+1}, α_{m+2}, ..., α_n ses zéros à l'extérieur de c, on aura pour $k = 1, 2, \ldots, m$

$$\sum I\left(\frac{r}{\alpha_k}\right) = 2 g_0 \log \frac{r^n}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} + \sum \lambda\left(\frac{\alpha_k}{r}\right) \tag{40}$$

et pour $k = m + 1, \ldots, n$

$$\sum I\left(\frac{r}{\alpha_k}\right) = \sum \lambda\left(\frac{r}{\alpha_k}\right), \tag{41}$$

de sorte que

$$(42)\quad \begin{cases} K(r) = \sum_{(1)} \lambda\left(\frac{\alpha_k}{r}\right) \\ \qquad + \sum_{(2)} \lambda\left(\frac{r}{\alpha_k}\right) + 2g_0 \log \frac{r^n}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} + g_0 f(0), \end{cases}$$

la somme $\sum_{(1)}$ étant rapportée aux zéros intérieurs et $\sum_{(2)}$ aux zéros extérieurs. *On a ainsi une fonction asymétrique des α_i exprimée à l'aide de l'intégrale* $K(r)$.

En prenant pour r une limite inférieure γ des modules des α_i, la somme $\sum_{(2)}$ et le terme logarithmique disparaissent dans le second membre de (42) et cette formule se réduit à

$$(43)\qquad K(\gamma) = \sum \lambda\left(\frac{\gamma}{\alpha_k}\right) + g_0 \log f(0),$$

exprimant, ainsi, une fonction symétrique des α_i à l'aide de $K(r)$.

2. Les fonctions symétriques et asymétriques des α_i peuvent aussi s'exprimer par l'intégrale précédente

$$H(r) = \int_a^b \varphi(t) F(r, t)\, dt.$$

En partant de la formule (21) qui se réduit ici à

$$(44)\qquad H(r) = \sum_1^n B\left(\frac{\alpha_k}{r}\right)$$

et en remarquant que si l'on suppose le rayon de convergence R de la série correspondante

$$\mu(x) = \sum_1^\infty g_n x^n$$

au moins égal à 1 on a

$$B(x) = g_0 + \mu(x) \qquad \text{pour} \qquad |x| < 1,$$

$$B(x) = -\mu\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{pour} \qquad |x| > 1,$$

on arrive à la formule

$$(45) \qquad H(r) = ng_0 + \sum_{(1)} \mu\left(\frac{\alpha_k}{r}\right) - \sum_{(2)} \mu\left(\frac{r}{\alpha_k}\right),$$

exprimant une fonction asymétrique des α_i *par l'intégrale* $H(r)$.

En prenant $r = \gamma$ on aurait *la fonction symétrique*

$$(46) \qquad \sum \mu\left(\frac{\alpha_k}{\gamma}\right),$$

étendue à tous les α_i, *exprimée à l'aide de* $H(r)$.

En choisissant pour $\varphi(t)$ une fonction quelconque satisfaisant à la condition $[\varphi, a, b, p]$, où p est un entier positif, la fonction $\mu(x)$ sera un polynome en x, la somme $\sum \mu\left(\frac{r}{\alpha_k}\right)$ étendue à tous les α_i se calculerait à l'aide des coefficients de $f(z)$, et l'on aura *la fonction symétrique*

$$\sum \left[\mu\left(\frac{\alpha_k}{r}\right) + \mu\left(\frac{r}{\alpha_k}\right)\right],$$

étendue aux α_i *intérieurs à* c, exprimée à l'aide de $H(r)$ et des coefficients de $f(z)$.

3. On peut encore exprimer les fonctions symétriques et asymétriques des α_i par l'intégrale

$$(47) \qquad L(r) = \int_a^b \varphi(t)\,\Phi(r, t)\,dt,$$

où $\Phi(r, t)$ désigne la partie réelle de la dérivée logarithmique de $f(z)$ le long de la circonférence C; on trouve aisément

$$L(r) = \frac{1}{r}\sum A\left(\frac{\alpha_k}{r}\right)$$

avec

$$A(x) = -\frac{1}{2}\frac{dI}{dx},$$

ce qui conduit à la formule

$$(48) \qquad L(r) = \sum_{(1)} \frac{1}{\alpha_k}\mu\left(\frac{\alpha_k}{r}\right) - \sum_{(2)}\left[\frac{g_0}{\alpha_k} + \frac{1}{\alpha_k}\mu\left(\frac{r}{\alpha_k}\right)\right],$$

exprimant une fonction asymétrique des α_i *par* $L(r)$.

On en tire aussi la formule

$$(49) \qquad L(\gamma) = -\sum\left[\frac{g_0}{\alpha_k} + \frac{1}{\alpha_k}\mu\left(\frac{r}{\alpha_k}\right)\right],$$

exprimant une fonction symétrique des α_i *par* $L(r)$.

En prenant pour $\varphi(t)$ une fonction quelconque satisfaisant à la condition $[\varphi, a, b, 0]$, *l'intégrale*

$$(50) \qquad -\frac{1}{g_0}L(r)$$

aura pour valeur la somme des inverses des α_i *extérieurs à la circonférence* C; en appliquant la proposition au polynome

$$z^n f\left(\frac{1}{z}\right),$$

l'expression correspondante (50) *aura pour valeur la somme des* α_i *intérieurs à c.*

Remarquons aussi, pour terminer, que la plupart de ces résultats s'appliquent manifestement encore aux cas où $f(z)$ est une fonction transcendante entière du genre zéro et conduisent, entre autres conséquences, à diverses formules sommatoires connues ou nouvelles.