NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. FONTENÉ

Sur les quadrangles de Desboves

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 16-20

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__16_0>

[K8f]

SUR LES QUADRANGLES DE DESBOYES;

PAR M. G. FONTENÉ.

1. Considérons un quadrangle ABCD, et posons

$$AB = a, \quad BC = b, \quad CD = c,$$
$$DA = d, \quad AC = e, \quad BD = f.$$

D'une part, les quatre triangles que l'on obtient en supprimant l'un ou l'autre des quatre points A, B, C, D ont respectivement pour côtés

$$fbc, \quad ecd, \quad fda, \quad eab.$$

D'autre part, les trois couples de côtés opposés du quadrangle sont

$$a \text{ et } c, \qquad b \text{ et } d, \qquad e \text{ et } f.$$

2. La relation qui a lieu entre les longueurs des six côtés d'un quadrangle a été établie par Carnot au moyen de celle qui a lieu entre les cosinus de trois angles liés par l'une des relations $\lambda \pm \mu \pm \nu = 2k\pi$. On peut lui donner la forme très symétrique

$$\begin{aligned}
&a^2 c^2(e^2 + f^2 + b^2 + d^2 - a^2 - c^2)\\
&+ b^2 d^2(e^2 + f^2 + a^2 + c^2 - b^2 - d^2)\\
&+ e^2 f^2(a^2 + c^2 + b^2 + d^2 - e^2 - f^2)\\
&- (f^2 b^2 c^2 + e^2 c^2 d^2 + f^2 d^2 a^2 + e^2 a^2 b^2) = 0.
\end{aligned}$$

3. On peut écrire

$$\begin{aligned}
&(a^2 + c^2)(b^2 d^2 + e^2 f^2 - a^2 c^2) + \ldots + \ldots\\
&\quad - (f^2 b^2 c^2 + e^2 c^2 d^2 + f^2 d^2 a^2 + e^2 a^2 b^2) = 0,
\end{aligned}$$

d'où, en complétant le carré dans la seconde ligne,

$$(a^2+c^2)[(bd+ef)^2-a^2c^2]+\ldots+\ldots$$
$$-(fbc+ecd+fda+eab)^2=0,$$

ou enfin

$$(ac+bd+ef)[(a^2+c^2)(bd+ef-ac)+\ldots+\ldots]$$
$$-(fbc+ecd+fda+eab)^2=0.$$

La relation de Carnot ayant lieu entre les carrés des longueurs des six côtés du quadrangle, nous pouvons changer par exemple e en $-e$, ce qui donne (en multipliant par -1) :

$$(ac+bd-ef)\begin{bmatrix}(a^2+c^2)(ac-bd+ef)\\+(b^2+d^2)(bd-ac+ef)\\-(e^2+f^2)(ef+ac+bd)\end{bmatrix}$$
$$+(fbc-ecd+fda-eab)^2=0.$$

4. Dès lors, si les côtés d'un quadrangle satisfont à la relation

$$(1)\qquad fbc-ecd+fda-eab=0,$$

ils satisfont à l'une ou à l'autre des deux relations

$$(2)\qquad ac+bd-ef=0,$$

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}&(a^2+c^2)(ac-bd+ef)\\&+(b^2+d^2)(bd-ac+ef)\\&-(e^2+f^2)(ef+ac+bd)=0,\end{aligned}\right.$$

et réciproquement.

Sauf la forme très symétrique que nous donnons ici à la relation (3), le résultat précédent appartient à Desboves, qui l'a énoncé sans démonstration (*Nouvelles Annales,* 1877, p. 227); Desboves écrit l'hypothèse sous la forme

$$(1')\qquad \frac{e}{f}=\frac{da+bc}{dc+ab},$$

et la conclusion sous la forme

$$(2') \qquad ef = ac + bd,$$

ou bien

$$(3') \quad \begin{cases} (a^2 + c^2 + b^2 + d^2 - e^2 - f^2)(ac + bd + ef) \\ \qquad - 2(da + bc)(dc + ab) = 0. \end{cases}$$

M. Moret-Blanc (*N. A.*, 1878, p. 263) a justifié l'énoncé de Desboves en vérifiant que la relation de Carnot, prise sous forme non symétrique, peut s'écrire

$$(ac + bd - ef) \times \varphi(a, b, \ldots) \\ + [e(dc + ab) - f(da + bc)]^2 = 0,$$

φ étant le premier nombre de la relation (3'); j'ai conservé le principe de cette démonstration.

5. L'hypothèse étant prise sous la forme (1'), le calcul suivant n'est pas sans intérêt. Désignons par k la quantité $\dfrac{da + bc}{dc + ab}$. La relation de Carnot, transformée par l'hypothèse $e = kf$, devient

$$-k^2(k^2 + 1)f^6 + k^2 f^4(a^2 + c^2 + b^2 + d^2) + \ldots \\ - (a^2c^2 - b^2d^2)(a^2 + c^2 - b^2 - d^2) = 0,$$

et cette relation est certainement satisfaite si l'on a (cas du quadrangle inscriptible)

$$kf.f = ac + bd;$$

le premier membre de cette relation est donc divisible par $kf^2 - (ac + bd)$, et le quotient, calculé avec les seuls termes que l'on a écrits, est

$$-k^2(k^2+1)f^4 + kf^2(a^2 + c^2 + b^2 + d^2) - (k^2+1)f^2(ac + bd) \\ + (ac - bd)(a^2 + c^2 - b^2 - d^2);$$

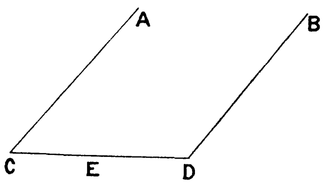
en remplaçant kf par e, et en égalant à zéro, on trouve la relation (3) sous la forme

$$ef(a^2+c^2+b^2+d^2-e^2-f^2)-(ac+bd)(e^2+f^2)$$
$$+(ac-bd)(a^2+c^2-b^2-d^2)=0;$$

il suffit de grouper les termes en a^2+c^2, b^2+d^2, e^2+f^2, pour obtenir la forme (3).

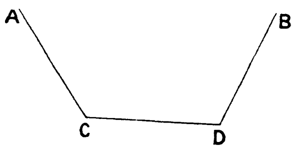
6. Un quadrangle étant supposé inscriptible à un cercle, et l'ordre des sommets sur la circonférence étant A, B, C, D, de sorte que les côtés croisés sont AC

Fig. 1.



et BD, si l'on applique à chacun des quatre triangles de la figure la relation classique $abc=4\,RS$, on obtient la relation (1) sous cette forme même.

Fig. 2.



La réciproque n'est exacte qu'à la condition de considérer seulement des quadrangles pour lesquels le contour ABCD est convexe; l'hypothèse (1) entraîne alors la conséquence (2).

En dehors de ce cas, l'hypothèse (1) entraîne la conséquence (3), et l'on a ce que je propose d'appeler un *quadrangle de Desboves*.

Voici des exemples de tels quadrangles. Si l'on suppose $e = f$ dans la relation (1′), on a $(d - b)(c - a) = 0$, et nous prendrons par exemple $b = d$. Avec la relation (2′), on a un trapèze isoscèle avec ses diagonales, les diagonales étant e et f. Avec la relation (3), on peut avoir un trapèze isoscèle avec ses diagonales, les diagonales étant b et d, ou un parallélogramme avec ses diagonales a, c.