NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MAURICE FOUCHÉ

Sur le problème d'Apollonius

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 8 (1908), p. 162-172

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__162_1>

[K12c]

SUR LE PROBLÈME D'APOLLONIUS;

PAR M. MAURICE FOUCHÉ,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

(SUITE.)

III. Passons maintenant au second théorème dont nous rappellerons d'abord l'énoncé :

On considère deux triangles ABC, $A_1B_1C_1$ *sur les* *côtés desquels on prend des semi-droites que nous désignerons comme précédemment par* a, b, c, a_1, b_1, c_1. *On suppose que ces semi-droites ont leurs directions conjuguées, c'est-à-dire que si l'on mène à un cycle des semi-droites respectivement parallèles aux six précédentes, les points de contact des tangentes parallèles aux semi-droites désignées par la même lettre avec ou sans indice forment trois couples de points appartenant à une même involution sur le cycle. Dans ces conditions, les quatre cycles tangents respectivement aux systèmes de semi-droites* abc, ab_1c_1, a_1bc_1, a_1b_1c *sont tangents à un même cycle.*

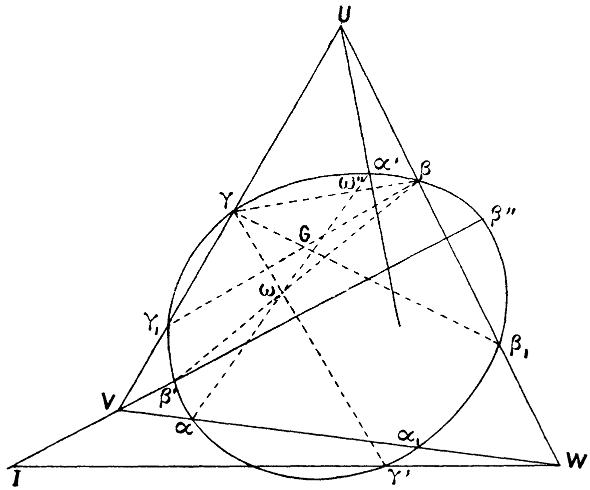
Ce théorème peut être considéré comme une conséquence du suivant :

Théorème I. — *Soit un triangle* UVW *dont les côtés coupent une conique, savoir :* VW *aux points* α *et* α_1, WU *en* β *et* β_1, UV *en* γ *et* γ_1. *Si un triangle* $\alpha'\beta'\gamma'$, *inscrit dans la conique, est homologique à la fois aux deux triangles* UVW *et* $\alpha\beta\gamma$, *le centre d'homologie des deux triangles* $\alpha'\beta'\gamma'$ *et* $\alpha\beta\gamma$ *se trouve sur la droite de Pascal relative à l'hexagone* $\alpha\beta_1\gamma\alpha_1\beta\gamma_1$ *inscrit dans la conique, pourvu toutefois que le triangle* $\alpha'\beta'\gamma'$ *ne se réduise ni à un point ni à une droite, et qu'il n'ait pas deux sommets communs avec le triangle* $\alpha\beta\gamma$.

Pour le démontrer, considérons comme fixes le triangle UVW (*fig.* 1) et la conique, et par suite les six points α, β, γ, α_1, β_1, γ_1. Donnons-nous de plus le point α' sur la conique. Le centre d'homologie des des deux triangles $\alpha'\beta'\gamma'$, UVW sera sur la droite Uα', tandis que le centre d'homologie des deux triangles

$\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, sera sur la droite $\alpha\alpha'$. Prenons maintenant sur la conique un point quelconque β' que nous joindrons à β. $\beta'\beta$ coupera $\alpha\alpha'$ en ω; joignons $\gamma\omega$ qui coupera la conique en un second point γ'. Le triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ est homologique au triangle $\alpha\beta\gamma$. Pour qu'il le

Fig. 1.



fût aussi à UVW, il faudrait que le point I d'intersection des deux droites $V\beta'$ et $W\gamma'$ se trouvât sur $U\alpha'$. Considérons le lieu décrit par le point I quand le point β' parcourt la conique, et cherchons comment il coupe la droite $U\alpha'$.

Si l'on se donne la droite $V\beta'$, celle-ci coupera la conique en deux points β', β'', à chacun desquels correspondra un point γ' ou γ''. $W\gamma'$ et $W\gamma''$ couperont $V\beta'$ en deux points I et I', de sorte qu'on voit déjà que la droite $V\beta'$ coupe le lieu en deux points autres que V. Si l'on donne à $V\beta'$ la direction VW, on pourra mettre β' en α_1 ou en α. Si on le met en α_1, on trouve un certain point γ''', et le point I est bien défini en W. Si l'on met β' en α, ω vient aussi en α; γ' y vient aussi, et les deux droites qui déterminent le point I se confondent en VW. Le point I est alors indéterminé, et la droite VW fait partie du lieu; mais le triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ se réduit à la droite $\alpha\alpha'$. Cette partie du lieu est donc à rejeter. Enfin, pour toute autre position de β', la droite $V\beta'$ ne passe pas par W. W est donc un point double du lieu complet et un point simple du lieu réduit après suppression de la droite VW. Il en est évidemment de même du point V, car, au lieu de se donner β', on pourrait se donner γ'. Il en résulte que la droite $V\beta'$ coupe le lieu réduit en trois points. Donc ce lieu est une cubique qui coupe la droite $U\alpha'$ en trois points.

Si l'on met β' en α', ω et γ' viennent aussi en α', et le point I également. A cette position particulière correspond un triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ réduit au simple point α'; c'est donc encore une solution singulière à rejeter. Si maintenant on met β' en γ, le point ω est à l'intersection ω'' de $\alpha\alpha'$ avec $\beta\gamma$; γ' vient en β et I en U. Dans ce cas le triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ est le triangle $\alpha'\beta\gamma$ homologique à UVW avec U pour centre d'homologie. C'est encore une solution singulière à rejeter.

Ainsi le lieu du point I coupe déjà la droite $U\alpha'$ aux deux points U et α' que nous rejetons. Reste le troisième point d'intersection. Si l'on se donne le point I sur son lieu, on pourra joindre IV qui coupera la conique en deux points β' et β''. A chacun de ces deux points correspondra sur $\alpha\alpha'$ un point ω, ou ω'. ω et ω' seront différents tant que $V\beta'$ ne sera pas tangente à la conique. Ces deux points donneront des points γ' et γ'' différents, et des droites différentes $W\gamma'$, $W\gamma''$. Une seule de ces droites passera en I; l'autre coupera $V\beta'$

au point d'intersection de $V\beta'$ avec la cubique qui ne sera ni V ni I, de sorte qu'à chaque position de I sur son lieu correspond un seul point β' sur la conique, et un seul point ω sur $\alpha\alpha'$. Ainsi, au point I où la cubique rencontre $U\alpha'$ ne correspond qu'un seul point ω sur $\alpha\alpha'$. Quand α' parcourt la conique, ce point ω décrit une ligne qui est le lieu des centres d'homologie avec $\alpha\beta\gamma$ de tous les triangles inscrits à la conique et homologiques à la fois à UVW et à $\alpha\beta\gamma$. A la vérité, le lieu complet comprend aussi les trois côtés du triangle UVW qui correspondent à des triangles réduits à une droite passant par α, β ou γ; mais ces trois droites ont déjà été supprimées. Le lieu complet comprend aussi le lieu du point α' correspondant aux triangles réduits à ce seul point, et le lieu du point ω'' situé sur $\beta\gamma$ ainsi que ceux des autres points situés sur $\gamma\alpha$ et $\alpha\beta$, correspondant au cas où le point I est en U, V ou W. Mais le lieu de α' est la conique même, et ceux des points ω'' sont les côtés du triangle $\alpha\beta\gamma$. Du reste, toutes ces parties du lieu ont déjà été supprimées. Il reste à démontrer qu'après ces suppressions le lieu du point ω est la droite de Pascal relative à l'hexagone inscrit $\alpha\beta_1\gamma\alpha_1\beta\gamma_1$.

Nous savons déjà que sur chaque droite $\alpha\alpha'$ tirée de α, il n'y a qu'un seul point de ce lieu autre que le point α. Il pourrait se faire que le point α fût un point du lieu. On observera que le point ω ne pourrait venir en β que si $\alpha\alpha'$ passait en β, c'est-à-dire si α' venait en β. Donc, si β est un point du lieu, ce ne peut être qu'un point simple. Il en est évidemment de même de α, si toutefois on écarte les cas particuliers où la symétrie entre les trois points α, β, γ serait rompue, comme par exemple si la droite VW était tangente à la conique. De là résulte que la droite $\alpha\alpha'$ coupe le lieu de ω en deux points ou en un seul. Le lieu de ω est donc une conique si les points α, β, γ en font partie, une droite dans le cas contraire.

Soient maintenant G, H, K les points d'intersection des côtés opposés de l'hexagone $\alpha\beta_1\gamma\alpha_1\beta\gamma_1$, savoir : G, intersection de $\beta\gamma_1$ et $\gamma\beta_1$; H, de $\gamma\alpha_1$ et $\alpha\gamma_1$; K, de $\alpha\beta_1$ et $\beta\alpha_1$. Le triangle inscrit homologique de $\alpha\beta\gamma$ avec G pour centre d'homologie a son sommet β' en γ_1 et son sommet γ' en β_1. Donc, quelle que soit la position de α' sur la conique, il est homologique à UVW avec U pour centre d'homologie. Donc G fait partie du lieu du point ω, et il en est évidemment de même de H et de K. Mais les trois points G, H, K sont en ligne droite, et c'est la droite de Pascal. Donc, si le lieu de ω passait par α, β, γ, ce serait une conique qui se décomposerait en la droite de Pascal et une autre droite; mais alors, celle-ci devrait passer par les trois points α, β, γ, car la droite de Pascal ne passe par aucun d'eux, tant que les six points restent distincts. Cela est impossible. Donc, enfin, le lieu de ω ne passe par aucun des trois points α, β, γ, et ce lieu est la droite de Pascal. C. Q. F. D.

Remarques. — Si l'un des côtés du triangle, VW par exemple, est tangent à la conique, les deux points α et α_1 sont confondus, et la droite de Pascal passe en α.

Si deux des côtés du triangle sont tangents à la conique, par exemple UV et UW, β se confond avec β_1, γ avec γ_1 et la droite de Pascal est $\beta\gamma$; mais le point G est indéterminé sur cette droite.

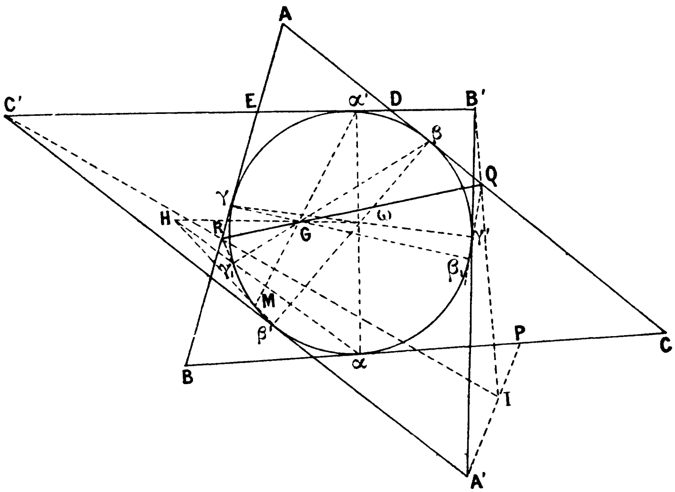
Si, enfin, les trois côtés du triangle UVW sont tangents à la conique, les trois points G, H, K sont indéterminés et la droite de Pascal aussi, ce qui laisse à présumer que le lieu du point ω est tout le plan, c'est-à-dire que tout triangle inscrit à la conique et homologique à l'un des triangles $\alpha\beta\gamma$, UVW, l'est aussi à l'autre. Cette proposition est, en effet, exacte et peut être démontrée rigoureusement de plusieurs manières. Remarquons que les deux triangles inscrits $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, s'ils sont homologiques, forment un hexagone $\alpha\beta'\gamma\alpha'\beta\gamma'$ inscrit à la conique et circonscrit à une autre conique, puisque les diagonales qui joignent les côtés opposés $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ sont concourantes par hypothèse. On peut alors énoncer la proposition sous la forme suivante :

Théorème II. — *Si un hexagone est inscrit à une conique et circonscrit à une autre, les deux triangles formés, l'un par trois sommets non consécutifs et l'autre par les tangentes à la conique circonscrite aux trois autres sommets, sont homologiques.*

Ajoutons que ce théorème présente cette particularité d'être identique à son corrélatif.

Deuxième théorème de M. Bricard. — Soient un triangle ABC et le cycle inscrit qui touche les côtés aux points α, β, γ. Nous supposerons les côtés dirigés suivant AB, BC, CA. Pour construire le second triangle $A_1B_1C_1$, joignons α, β, γ à un point quelconque ω; les trois droites ainsi obtenues coupent le cercle respectivement aux points α', β', γ'. Il suffit de tracer le triangle $A_1B_1C_1$ de manière que ses côtés soient respectivement parallèles à ceux du triangle A'B'C' formé par les tangentes au cycle aux points α', β', γ'. Les côtés de ce triangle doivent être dirigés suivant A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1. Considérons maintenant les cycles O_1, O_2, O_3 respectivement tangents aux systèmes de semi-droites ab_1c_1, bc_1a_1, ca_1b_1. Le centre de similitude des cycles O et O_1 se trouve d'une part sur la tangente commune a ou BC, et d'autre part sur la droite $A_1 A'$ qui joint les points d'intersection des tangentes respectivement parallèles b' et c' au cycle O, et b_1 et c_1 au cycle O_1. Ce centre de similitude est donc à l'inter-

Fig. 2.



section P de BC avec $A_1 A'$. De même, les centres de similitude de OO_2 et de OO_3 sont respectivement en Q et R, aux points d'intersection de AC avec $B_1 B'$ et de CA avec $C_1 C'_1$. De plus, les trois droites $A_1 A'$, $B_1 B'$, $C_1 C'$ concourent au point I, centre d'homothétie des deux triangles $A_1 B_1 C_1$ et $A'B'C'$. Cette remarque nous dispense de tracer le triangle $A_1 B_1 C_1$.

Cherchons d'abord un des cycles tangents aux trois cycles O, O_2, O_3. Nous mènerons des centres de similitude Q et R les secondes tangentes au cycle O, $Q\beta_1$ et $R\gamma_1$; puis nous joindrons $\beta\gamma_1$ et $\gamma\beta_1$ qui se couperont en G sur l'axe de similitude QR. Il faudra joindre G au point de contact d'une des tangentes à O parallèles à l'une des tangentes communes à O_2 et O_3. Or, a_1 ou B_1C_1 est l'une de ces tangentes communes, et elle est parallèle à $B'C'$ qui touche le cycle O en α'. Il faudra donc joindre $G\alpha'$ qui coupera le cycle O en un second point M, lequel sera le point de contact avec O d'un cycle tangent à O, O_2, O_3. Le théorème sera démontré si l'on fait voir qu'on retrouvera le même point M quand on répétera la construction précédente en partant des combinaisons de cycles O, O_1, O_2 ou O, O_1, O_3.

Soient H et K les points obtenus par la construction qui a servi à déterminer le point G, mais en partant des points Q et R ou P et Q, et soit α_1 le point de contact de la seconde tangente au cycle O issue de P. Les points G, H, K sont sur une même droite qui est la droite de Pascal relative à l'hexagone inscrit $\alpha\beta_1\gamma\alpha_1\beta\gamma_1$. La polaire de A' est la droite $\beta'\gamma'$. Celle de P est $\alpha\alpha_1$. Donc $\beta'\gamma'$ et $\alpha\alpha_1$ se coupent en un point qui est le pôle de $A'P$ et se trouve par conséquent situé sur la polaire de I. De même, les intersections respectives de $\gamma'\alpha'$ avec $\beta\beta_1$ et de $\alpha'\beta'$ avec $\gamma\gamma_1$ sont sur la même polaire. Il en résulte que le triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ est homologique au triangle UVW formé par les trois droites $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$. Le triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ est donc dans le cas du théorème I, et le point ω, centre d'homologie des triangles $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma'$, est sur la droite GHK, droite de Pascal relative à l'hexagone inscrit $\alpha\beta_1\gamma\alpha_1\beta\gamma_1$.

Cela posé, désignons toujours par M le second point d'intersection de $G\alpha'$ avec le cercle, et considérons l'hexagone inscrit $M\alpha'\alpha\gamma_1\beta\beta'$. Les côtés opposés $M\alpha'$, $\gamma_1\beta$ se coupent en G_1, $\alpha'\alpha$, $\beta\beta'$, en ω. Donc $\alpha\gamma_1$ et $\beta'M$ se coupent sur la droite ωG, qui est la même que GHK, mais $\alpha\gamma_1$ coupe cette droite en H. Donc $\beta'M$ passe en H, ou $H\beta'$ en M. Un autre hexagone montrerait que $K\gamma'$ passe aussi en M. C. Q. F. D.

Remarques. — Le point M ne dépend que des triangles ABC, $A'B'C'$, et du point I. Il y a plus. Faisons pivoter la droite $B'I$ autour de BI et cherchons le lieu que doit décrire le point I pour que le point M reste invariable. A chaque position de $B'I$ correspond sur AC un seul point Q, et sur le cercle un seul point de contact β_1 de la deuxième tangente $Q\beta_1$. En joignant $\beta_1\gamma$ on trouve sur $\alpha'M$ un seul point G; en joignant QG, on a sur AB le point R, et enfin, en joignant $C'R$, on a sur $B'I$ le point I. Il est clair que si l'on fait la construction en partant de ce point I et des points Q et R, on retrouvera le point M. De là résulte aussi que les droites $B'I$ et $C'I$ sont deux rayons homologues de deux faisceaux homographiques. Si l'on donne à $B'I$ la direction $B'C'$, le point Q est en D, à l'intersection de AC avec $B'C'$, le point β_1 en α', G aussi en α' et R en E, à l'intersection de AB avec $B'C'$. Donc $C'I$ devient $C'B'$, et le point I est indéterminé sur $B'C'$. Donc le lieu du point I se compose de la droite $B'C'$, partie singulière, et d'une autre droite.

Nous savons d'après le théorème II que les deux triangles $A'B'C'$ et $\alpha\beta\gamma$ sont homologiques. L'hexagone à la fois inscriptible et circonscriptible est $\alpha\beta'\gamma\alpha'\beta\gamma'$. Les trois droites $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$ passent donc par un même point φ. Si l'on met I en coïncidence avec φ, le triangle PQR se confond avec le triangle $\alpha\beta\gamma$. Les points G, H, K et par suite le point M sont indéterminés, ce qui s'explique par ce fait, facile à vérifier, que dans ce cas les trois cycles O_1, O_2, O_3 sont tangents au cycle O respectivement aux points α, β, γ, de sorte que le cycle tangent aux quatre cycles est le cycle O lui-même. Il en résulte que la droite décrite par le point I, quand on se donne le point M, passe par le point φ quelle que soit la position du point M sur le cercle O. On peut donc ajouter au deuxième théorème de M. Bricard, la remarque suivante :

Le cycle tangent aux quatre cycles considérés touche le cycle inscrit au triangle ABC *en un point qui reste fixe, quand, laissant fixe le deuxième triangle circonscrit* $A'B'C'$, *on remplace le triangle* $A_1B_1C_1$ *par un autre, homothétique de* $A'B'C'$ *par rapport au même centre* I, *ou même, si l'on déplace ce centre d'homothétie sur une droite passant par le point de concours des droites qui joignent les sommets du triangle* $A'B'C'$ *aux points de contact avec le cycle* O *des côtés correspondants du triangle* ABC.