Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 91-94

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__91_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2042.

(1906, p. 336.)

Soient, dans un plan vertical, Ox *une droite horizontale,* Oy *une droite verticale dirigée de haut en bas. Construisons : 1° une cardioïde ayant son point de rebroussement en* O *et son axe dirigé suivant* Ok*; soit* A *son second point de rencontre avec* Ok*; 2° une lemniscate ayant son point double en* O*, tangente à* Ox *et* Oy *et* *située dans l'angle xOy et dans l'angle opposé par le sommet.*

Un point matériel pesant M *est abandonné sans vitesse initiale en* A *et assujetti à décrire la cardioïde (on fait abstraction des résistances passives de toute nature). Pour chaque position du point* M, *on construit la bissectrice de l'angle xOM, qui rencontre la lemniscate en deux points. Démontrer que chacun de ces points décrit la lemniscate d'un mouvement uniforme.* (R. B.)

SOLUTION

Par M. G. F.

Considérons un point matériel M assujetti à se mouvoir sur la courbe dont l'équation est

$$\rho^n = a^n \cos n\omega; \tag{C}$$

et supposons que ce point est sollicité par une force F, perpendiculaire à l'axe polaire, telle que l'on ait

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2(1-n)} \mathrm{F} y. \tag{1}$$

a. La courbe étant d'abord quelconque, divisons membre à membre la relation des forces vives

$$d\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = \mathrm{F}\, dy,$$

et la relation (1); nous avons

$$d.\log v^2 = 2(1-n) d.\log y,$$

et, par suite,

$$v = \mathrm{C} y^{1-n}, \tag{2}$$

$$\mathrm{F} = m \times (1-n)\, \mathrm{C}^2 y^{1-2n}; \tag{3}$$

il en résulte

$$t = \frac{1}{\mathrm{C}} \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{y^{1-n}}. \tag{4}$$

Par la courbe (C), on a

$$\rho^{n-1}.\,d\rho = -\,a^n \sin n\omega\, d\omega,$$
$$\rho^{n-1}.\,\rho\, d\omega = \quad a^n \cos n\omega\, d\omega,$$

d'où, par élévation au carré et addition,

$$\rho^{n-1}.\,ds = a^n\, d\omega;$$

on a donc

$$(5) \qquad t = \frac{a^n}{C}\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{\left(\frac{y}{\rho}\right)^{1-n}} = \frac{a^n}{C}\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{\sin^{1-n}\omega}.$$

Si l'on fait $n = \frac{1}{2}$, et si l'on remplace C^2 par $2g$, la courbe (C) est une cardioïde placée comme l'indique l'énoncé, et l'on est dans le cas d'un point matériel pesant :

$$\frac{1}{2}mv^2 = Fy, \qquad v^2 = 2gy, \qquad F = mg;$$

pour $y = 0$, on a bien $v = 0$, comme le demande l'énoncé.

Avec $n \gtrless \frac{1}{2}$, les formules (2) et (3), où l'on fait $y = 0$, montrent que le mobile ne peut pas partir du point A qui correspond à la valeur $\omega = 0$; on prendra comme conditions initiales $y = y_0$, $v = v_0$, aucune de ces deux quantités n'étant nulle, et ces conditions déterminant la constante G.

Voici alors l'interprétation exacte de la relation (1) : *le travail de la force entre les positions* M_0 *et* M *est une fraction parfaitement déterminée*, $\frac{1}{2(1-n)}$, *de la différence* $Fy - F_0y_0$, *la vitesse* v étant de plus infiniment petite, en même temps que l'ordonnée y.

b. Considérons alors la courbe auxiliaire

$$(C') \qquad r^{\frac{1}{n}} = b^{\frac{1}{n}} \sin\frac{\theta}{n}.$$

On a pour la différentielle de l'arc

$$ds' = \frac{b^{\frac{1}{n}}\, d\theta}{r^{\frac{1}{n}-1}} = \frac{b\, d\theta}{\left(\sin\frac{\theta}{n}\right)^{1-n}},$$

et, par suite,

$$\frac{s'}{b} = n \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\frac{\theta}{n}}{\left(\sin\frac{\theta}{n}\right)^{1-n}}.$$

A chaque valeur de ω relative à la courbe (C) faisons correspondre pour la courbe (C′) une valeur de θ donnée par la formule

$$(6) \qquad \theta = n\omega;$$

nous aurons

$$(7) \qquad \frac{s'}{b} = \frac{nC}{a^n}t,$$

de sorte que le mouvement du point M′ sur la courbe (C′) sera uniforme.

Pour $n = \frac{1}{2}$, la courbe auxiliaire est une lemniscate placée comme l'indique l'énoncé, et l'on a alors $\theta = \frac{\omega}{2}$.

Autres solutions par MM. LAUREAUX, LETIERCE et PARROD.