Certificats de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 519-523

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__519_1>

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Caen.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Déterminer les constantes p, q de manière que la fonction* $(x^2+px+q)e^{-x}$ *admette une fonction primitive* $F(x)$ *s'annulant pour x infini et ayant* 1 *pour racine double.*

Construire la courbe $y = F(x)$: *points d'inflexion.*

Dire si la série dont le terme général u_n est égal à $-F(n)$ *est convergente.*

$$\left(\text{On trouve } p = 4,\ q = 3,\ \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e}.\right)$$

II. *Un point* M, *de masse* 1, *est assujetti à glisser sans frottement sur la cardioïde*

$$r = a(1+\cos\theta);$$

il est attiré vers le pôle par une force égale à $\frac{3a^5}{r^4}$; *à l'instant initial, il est sur l'axe polaire, au sommet de la cardioïde, avec une vitesse* $\frac{a}{2}$. *Loi du mouvement du point* M : *pression sur la cardioïde.*

(¹) Nous devons signaler une petite erreur de date à la page 23. C'est en 1896 (et non en 1901) que MM. Laisant et Antomari prirent la direction des *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

(L'intégrale des forces vives donne

$$v^2 = 4a^2 \cos^2 \tfrac{1}{2}\theta \frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2a^5}{r^3} = \frac{a^2}{4 \cos^6 \frac{1}{2}\theta};$$

la pression sur la courbe est nulle.)

(Novembre 1907.)

Lille.

I. — ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

1. Ox, Oy *étant deux axes de coordonnées rectangulaires dans un plan, construire la courbe* (Γ) *représentée par l'équation*

$$xy^2 = 4a^2(2a - x).$$

2. M *désignant un point qui se déplace sur la courbe* (Γ), *étudier la variation de l'aire du rectangle* (R) *dont les côtés sont parallèles aux axes* Ox, Oy *et dont* O *et* M *sont deux sommets opposés.*

3. *Calculer l'aire de la surface plane* (S) *limitée par* Ox, Oy, *la courbe* (Γ) *et la parallèle à* Ox *menée par* M; *calculer également le volume qu'elle engendre en tournant autour de* Oy.

4. *Exprimer la longueur de la sous-tangente correspondant à un point* M *en fonction des coordonnées de ce point; montrer que cette longueur varie proportionnellement au carré de l'aire de* (R); *former et intégrer l'équation différentielle des courbes jouissant de cette dernière propriété.*

5. *Calculer le moment d'inertie par rapport à l'axe* Oy *de la surface* (S) *supposée recouverte d'une couche infiniment mince d'une matière pesante et homogène.*

II. — MÉCANIQUE.

1. *Travail des forces appliquées à un point matériel. On étudiera seulement les questions suivantes :*

1° *Expression analytique du travail élémentaire;*

2° *Travail pour un déplacement fini dans un champ où il existe une fonction de force ;*

3° *Propriétés des surfaces de niveau.*

2. *Un point matériel pesant est assujetti à se mouvoir sans frottement sur une hélice à axe vertical ; ce point est attiré par un point fixe* O *de l'axe de l'hélice proportionnellement à sa distance à ce point :*

1° *Trouver la position d'équilibre* A *du point* M *sur l'hélice eu égard à son poids* p *et à la force attractive* F *exercée sur lui par le point* O ;

2° *En supposant qu'on abandonne le point considéré à lui-même, sans vitesse initiale, dans une position déterminée* M_0, *trouver sa vitesse dans une position quelconque* M *en fonction de l'arc* AM. (Novembre 1907.)

Toulouse.

Epreuve écrite. — I. *Un cylindre homogène de rayon* R *est mobile autour de son axe supposé fixe et horizontal. On désigne par* A *le moment d'inertie du cylindre par rapport à son axe. Un fil de masse négligeable, fixé au cylindre par une de ses extrémités, est enroulé un grand nombre de fois autour du cylindre. Son autre extrémité pend librement et porte un poids* P. *Des ailettes de masse négligeable, fixées au cylindre, éprouvent de la part de l'air une résistance qui se traduit par un couple dont l'axe, dirigé suivant l'axe du cylindre, est proportionnel à la vitesse angulaire du cylindre.*

Trouver le mouvement du système partant du repos. Que devient ce mouvement au bout d'un temps suffisamment long ?

II. *Soit la courbe* C *définie en coordonnées rectangulaires par les équations*

$$x = a\cos t, \qquad y = a\sin t, \qquad z = au,$$

où t *est un paramètre variable et* u *une fonction donnée de ce paramètre :*

1° *Écrire les équations de la tangente et l'équation du plan osculateur en un point de la courbe* C.

2° *Soit* A *le point où cette tangente coupe le plan des* xy. *Déterminer la fonction* u *de façon que le point* A *décrive une circonférence ayant pour centre l'origine. Soit* C_1 *la courbe qui correspond à ce choix de la fonction* u *et qui passe par le point* $x = a$, $y = 0$, $z = a$.

Construire la projection de C_1 *sur le plan des* zx.

3° *Rectifier la courbe* C_1.

4° u *étant de nouveau une fonction quelconque de* t *comme dans la première partie, déterminer cette fonction de façon que le plan osculateur fasse un angle constant avec l'axe des* z.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Trouver avec trois chiffres significatifs les deux racines réelles de l'équation*

$$x^2 - 10 \log x - 3 = 0,$$

où $\log x$ *désigne le logarithme dans la base* 10 *de* x.

(Juillet 1907.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Soit une plaque rectangulaire, pesante,* non homogène, *dont les côtés ont pour longueurs* a *et* b.

On la fait osciller successivement autour de chacun des quatre côtés rendu horizontal, et l'on mesure chaque fois la durée des petites oscillations. Soient T_1, T_2, T_3, T_4 *ces quatre durées.*

En supposant connue l'intensité g *de la pesanteur, déduire des données précédentes le centre de gravité de la plaque.*

II. *Soit la droite représentée en coordonnées rectangulaires par l'équation*

$$x \sin t - y \cos t = u,$$

où t *est un paramètre variable et* u *une fonction de ce paramètre :*

1° *Calculer les coordonnées du point* M *où la droite touche son enveloppe ; calculer le rayon de courbure de l'enveloppe au point* M ; *indiquer la signification géométrique des quantités* t, u *et* $\frac{du}{dt}$.

2° *Quelle doit être la fonction u pour que le rayon de courbure ρ soit une fonction linéaire $as + b$ de l'arc s de la courbe? Montrer que l'expression trouvée pour u peut se simplifier par un choix convenable de l'origine des coordonnées.*

III. *Construire les courbes représentées en coordonnées rectangulaires par l'équation différentielle*

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{(y+3)(1-y^2)}}.$$

(Novembre 1907.)