Bibliographie

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 508-519

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__508_1>

BIBLIOGRAPHIE.

Leçons sur les théories générales de l'analyse, par *René Baire*. — Tome I : Principes fondamentaux, variables réelles. 1 volume grand in-8, de x-232 pages, avec 17 figures. Paris, Gauthier-Villars, 1907. Prix : 8^{fr}.

Un enseignement de l'Analyse peut et doit être conçu à divers points de vue, suivant le public auquel il est destiné. Les débutants et ceux qui étudient les Mathématiques en vue de leurs applications à la Mécanique, à la Physique, ou à l'Art de l'Ingénieur, demandent qu'on les mette le plus rapidement possible en possession d'un puissant instrument de recherches. Un certain manque de rigueur, de fréquents appels à l'intuition sont alors parfaitement justifiés, et l'on risquerait assurément de jeter le trouble dans bien des esprits neufs en examinant de trop près des notions telles que celles de limite et de continuité. Il faut seulement que le manque de rigueur soit nettement signalé, quand il se manifeste, et que les appels à l'intuition ne soient pas déguisés. M. J. Tannery professe à juste titre son éloignement pour un enseignement « qui n'est pas toujours sincère ».

C'est de cette manière large qu'est compris l'excellent enseignement donné depuis quelques années dans nos classes de Mathématiques spéciales, et qui semble avoir atteint sa forme à peu près définitive. Mais quelle qu'en soit la haute valeur pratique, il ne peut suffire à ceux qui veulent se consacrer à la Science pure. Ceux-là, pour devenir des mathématiciens dignes de ce nom, doivent non seulement étendre, mais approfondir leurs études. Ayant acquis une première vue d'ensemble, il leur faut revenir sur les principes, et asseoir leurs connaissances sur une base inébranlable.

Les belles et originales *Leçons* que vient de publier M. Baire sont écrites à ce dernier point de vue : elles s'adressent à ceux qui exigent du raisonnement pur tout ce qu'il peut donner. C'est dire que le souci de la rigueur y est extrême. Mais l'Ouvrage possède un autre caractère, que M. Baire réclame à juste titre : c'est celui de la simplicité. Non pas cette simplicité apparente obtenue en masquant toutes les difficultés, mais celle qui résulte des vues profondes sur l'ordonnance des faits mathématiques et leur développement harmonieux. Jointe à une rédaction très soignée et à une lucidité remarquable dans l'exposition des démonstrations les plus ardues, cette qualité rend la lecture du Livre facile, aussi facile du moins que le comporte l'abstraction du sujet.

Le premier Chapitre est consacré aux notions fondamentales. Les nombres irrationnels sont définis au moyen de la coupure, mais au lieu de poursuivre comme on le fait généralement l'emploi de cette notion pour étendre aux nombres irrationnels les opérations de l'Arithmétique, l'auteur introduit tout de suite celles de *borne supérieure* et de *borne inférieure* d'un ensemble. On peut alors définir simplement la différence de deux nombres irrationnels, et aborder la théorie des limites. Ce mode d'exposition, propre à M. Baire, avait déjà été adopté par lui dans sa *Théorie des nombres irrationnels, des Limites et de la continuité* (1), dont il a été rendu compte ici même (2). On aborde ensuite les notions de fonction et de continuité, et un nouveau principe, dit *principe d'extension*, permet de définir, dans les conditions les plus générales, une fonction (uniformément) continue, quand on la suppose définie pour les valeurs rationnelles de l'argument. On peut alors démontrer que *si deux fonctions, d'arguments quelconques, sont continues et égales pour tout point rationnel, elles sont encore égales pour un point quelconque*. Ce théorème légitime d'un coup d'extension aux nombres quelconques des règles ordinaires de calcul algé-

---

(1) Paris, Nony, 1905.

(2) *Nouvelles Annales*, 1905, p. 178.

brique. On se rend compte de l'économie ainsi réalisée, par rapport aux procédés ordinaires d'exposition.

Le Paragraphe suivant, consacré aux grandeurs concrètes, est très important. Dans la plupart des Ouvrages où la doctrine des nombres irrationnels est exposée au point de vue purement arithmétique, on applique sans explication suffisante à la mesure des grandeurs des quantités qui, jusque-là, ne sont apparues que comme de purs symboles. En quelques pages substantielles, M. Baire montre grâce à quels axiomes (*axiome d'Archimède, axiome de continuité*) les nombres irrationnels précédemment définis peuvent servir à la mesure des grandeurs concrètes, et en particulier, comment l'Analyse se relie à la Géométrie.

Viennent ensuite les propositions fondamentales de la théorie des fonctions continues (*une fonction continue est uniformément continue, une fonction continue dans un domaine est bornée supérieurement et inférieurement et atteint chacune de ses bornes, une fonction continue ne peut passer d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires*); puis l'étude des fonctions particulièrement importantes pour la suite $\sqrt[m]{x}$, x^y, etc. Les éléments de la théorie des séries et la définition du nombre e terminent le premier Chapitre.

Le Chapitre II concerne les dérivées et les intégrales de fonctions de variables réelles. Après un exposé rapide de la théorie des dérivées et des différentielles premières, on arrive à la notion d'intégrale définie. Les principes développés dans le premier Chapitre permettent une démonstration rapide et générale de la proposition fondamentale : *Toute fonction continue admet une intégrale,* sans l'obligation d'examiner successivement des hypothèses particulières. Puis on passe en revue les procédés élémentaires d'intégration. On pourrait reprocher ici à l'auteur une concision extrême, s'il ne s'adressait, comme je l'ai dit, à des lecteurs qu'il faut supposer déjà rompus à la pratique de l'Analyse par une étude préalable.

La notion d'intégrale définie peut souvent être étendue aux cas où les limites ou bien l'élément différentiel deviennent infinis. Ces cas sont examinés. La règle de dérivation sous le signe $\int$ est établie. Puis vient l'étude des fonctions implicites, des déterminants fonctionnels, des dérivées et différentielles d'ordre supérieur, des changements de variables, des différentielles totales. Je ne puis tout signaler, mais il est impossible de passer sous silence la définition remarquablement claire et simple, adoptée pour les différentielles d'ordre supérieur.

Le Chapitre III, consacré à l'évaluation des longueurs d'arcs, des aires et des volumes, et aux intégrales doubles et triples, me paraît un véritable chef-d'œuvre. Nulle part on ne peut mieux constater cette union de la profondeur à la simplicité qui distinguent le Livre de M. Baire. Et cette simplicité tient sans doute à ce que le raisonnement se laisse toujours guider par l'intuition géométrique, et n'intervient que pour la purifier. Voici, par exemple, en quelques mots, comment s'y prend l'auteur pour définir l'aire d'un *domaine plan borné* (un tel domaine ayant été défini au Chapitre I). On suppose connue par la géométrie élémentaire l'aire d'un domaine *polygonal,* c'est-à-dire dont la frontière est constituée par des lignes droites. Si maintenant D est un domaine plan quelconque, on appelle *aire de* D *un nombre plus grand que l'aire de tout domaine polygonal contenu dans* D *et plus petit que l'aire de tout domaine polygonal contenant* D, *ceci dans l'hypothèse où il existe un et un seul nombre possédant ces propriétés.* Cela posé, une démonstration très élégante conduit au théorème suivant : *Pour que le domaine* D *ait une aire, il est nécessaire et suffisant que sa frontière puisse être enfermée dans un domaine polygonal d'aire aussi petite que l'on veut.* Il est ensuite bien facile d'obtenir la formule classique qui ramène l'évaluation d'une aire au calcul d'une intégrale définie. Des raisonnements analogues sont appliqués plus loin à l'étude des volumes.

Une question plus délicate est la définition de l'aire d'une portion de surface.

La place me fait malheureusement défaut pour donner une idée de la méthode par laquelle M. Baire parvient à triompher des difficultés considérables que présente cette partie de la théorie.

On trouve enfin dans les pages consacrées aux intégrales doubles, triples et curvilignes, les mêmes qualités d'exposition et la même abondance de vues personnelles que dans le reste de l'Ouvrage.

Tel est ce livre où tout est matière à méditation. Souhaitons que l'auteur nous donne bientôt le second Volume, qui doit traiter des fonctions analytiques, des équations différentielles, des applications géométriques de l'Analyse, et des fonctions elliptiques. R. B.

Calcul graphique et Nomographie, par *M. d'Ocagne*. — 1 vol. in-18 jésus, de xxvi-392 pages, avec 146 figures dans le texte. Paris, Octave Doin, 1908. Prix : 5fr.

Tout problème de Mathématiques appliquées à la pratique aboutit au calcul numérique de certaines inconnues. Un tel calcul peut toujours être effectué par l'emploi des procédés exacts ou approximatifs qu'enseignent l'Arithmétique et l'Algèbre. Mais le travail est souvent long et fastidieux. Aussi a-t-on cherché depuis longtemps à substituer aux calculs numériques des opérations mécaniques ou graphiques conduisant plus rapidement au but et avec une moindre fatigue. Les procédés mécaniques sont les plus anciens, comme en témoignent la règle à calcul et les machines arithmétiques, dont l'idée première remonte au XVIIe siècle. Les premiers essais de calcul graphique ne datent guère que d'une centaine d'années.

L'application des procédés graphiques au calcul peut être conçue de deux manières différentes. On peut en premier lieu traduire les diverses opérations numériques par des constructions géométriques, effectuées avec la règle et le compas, et tout calcul exige alors un tracé spécial. Cette méthode semble de rigueur dans certains cas, où les données indépendantes sont très nombreuses, par exemple quand on veut résoudre un système de plusieurs équations linéaires à plusieurs inconnues. Mais on a le plus souvent affaire dans la pratique à une relation entre un petit nombre de variables, et le problème à résoudre consiste à calculer une de ces quantités, étant données les valeurs numériques de toutes les autres. Il est alors très avantageux de représenter cette relation par une épure dessinée une fois pour toutes, sur laquelle la lecture de la valeur cherchée se fait pour ainsi dire instantanément. Une telle épure a reçu le nom d'*abaque* ou de *nomogramme*.

Les premiers abaques paraissent être ceux de Pouchet (1795). La théorie et l'emploi de ces Tables graphiques ont été successivement étendus par Lalanne et par MM. Massau, d'Ocagne et Lallemand. Mais il était réservé à M. d'Ocagne de découvrir les principes généraux de la théorie des abaques, de la développer considérablement en y introduisant l'idée féconde de la dualité, et de l'édifier, sous le nom de *Nomographie*, en corps important de doctrine.

Le calcul graphique et les abaques ne font, bien entendu, connaître les résultats qu'entachés d'une certaine erreur. Mais l'approximation obtenue suffit largement aux besoins de la pratique, au moins dans l'art de l'ingénieur, où leur emploi est le plus fréquent. Et ici se manifeste une nouvelle supériorité de ces procédés sur ceux de l'Arithmétique. On sait que la pratique des opérations numériques approximatives est assez délicate. Combien de chiffres significatifs doit-on conserver dans les nombres soumis à ces opérations, en vue d'une approximation fixée à l'avance? Combien de chiffres doit-on conserver dans les divers produits ou quotients intermédiaires? Les réponses à ces questions ne sont pas toujours immédiates et, bien souvent, par crainte de rester en deçà du but, le calculateur utilise trop de chiffres et allonge inutilement son travail. Au contraire, dans le calcul graphique, la théorie des erreurs relatives s'applique, pour ainsi dire, automatiquement et, sans avoir besoin d'y réfléchir, l'opérateur obtient l'approximation qui est dans la nature des choses.

Le livre de M. d'Ocagne, qui fait partie de l'*Encyclopédie scientifique*, publiée sous la direction du Dr Toulouse (1), est le développement du cours libre de Calcul graphique et de Nomographie, qu'il a professé à la Sorbonne en 1907. Je vais tâcher d'en donner un résumé aussi fidèle que possible.

L'Introduction contient un exposé rapide des notions essentielles de Géométrie analytique qui seront utilisées dans la suite. L'auteur insiste sur les *coordonnées tangentielles* et

(1) Cette *Encyclopédie* est divisée en quarante Bibliothèques pourvues chacune d'un directeur spécial. Les Bibliothèques de *Mathématiques appliquées* et de *Mécanique appliquée et Génie* sont confiées à M. d'Ocagne lui-même.

surtout sur les *coordonnées parallèles,* dont l'emploi est très fréquent en Nomographie.

Le Livre I est consacré au *Calcul graphique* proprement dit. Il débute par des indications sur l'emploi des *échelles métriques* et des *verniers graphiques.* On étudie ensuite les constructions géométriques qui traduisent les opérations de l'Arithmétique élémentaire. Il faut signaler particulièrement un procédé très simple de détermination des termes successifs d'une série récurrente. De telles séries se présentent, par exemple, dans la résistance des matériaux.

Deux méthodes, dont la principale est due à M. Massau, sont indiquées pour la résolution graphique des systèmes d'équations linéaires à plusieurs inconnues, question à laquelle M. Farid-Boulad a apporté tout récemment ici même une intéressante contribution.

La résolution des équations algébriques de degrés quelconques fait intervenir la représentation des polynomes par les figures dites *orthogones.* La méthode, due à Lill, comporte naturellement un tâtonnement quand le degré de l'équation proposée dépasse le second.

Pour l'interprétation de certaines observations physiques, il est utile de construire la courbe représentative d'un polynome. A cet effet, M. d'Ocagne fait une application ingénieuse de la *transformation par l'abscisse,* qui s'exprime par les formules $X = x$, $Y = xy$. On peut aussi, avec M. Mehmke, introduire l'*image logarithmique d'une fonction,* c'est-à-dire représenter la fonction $f(z)$ par le point de coordonnées $\log(z)$, $\log f(z)$. Cette représentation se fait assez rapidement, soit en utilisant une certaine courbe transcendante tracée une fois pour toutes, soit en se servant du *compas à trois branches* de M. Brauer.

Le problème de l'intégration graphique consiste, étant donnée la courbe $y = f(x)$, à construire la courbe

$$Y = \int_a^x f(x)\,dx,$$

dite *courbe intégrale* de la première. Le procédé le plus rapide repose sur l'emploi de l'*intégraphe* Abdank-Abakanowicz. Mais, comme cet appareil est assez peu répandu, il est utile d'avoir une méthode graphique. Une telle méthode a été imaginée par M. Massau et donne de bons résultats. Le cas où la courbe est une parabole de degré quelconque donne lieu à des tracés spéciaux, où intervient la considération des *polygones intégrants*.

Pour la rectification approchée des cercles, M. d'Ocagne reproduit la construction très pratique qu'il a fait connaître dans ce Journal (1907, p. 1).

Le calcul graphique permet enfin la construction approchée des courbes définies par une équation différentielle du premier ordre, au sujet de laquelle l'auteur signale une ingénieuse traduction graphique, due à M. Runge, de la méthode d'approximations successives de M. Émile Picard.

Au second Livre, nous entrons dans la *Nomographie*. Après quelques préliminaires, on étudie les *abaques cartésiens*, c'est-à-dire la représentation de la relation $f(z_1, z_2, z_3) = 0$ par le réseau des courbes en z_1, z_2, obtenues en donnant à z_3 une série de valeurs constantes. Le principe de l'*anamorphose*, découvert dans un cas particulier par Lalanne, puis étudié dans toute son étendue par MM. Massau et d'Ocagne, conduit aux *abaques* à *lignes concourantes* les plus généraux, dans lesquels rentrent les abaques cartésiens. Plus spécialement, on obtient des abaques constitués uniquement par des réseaux de lignes droites, dans le cas très fréquent où la relation entre les trois variables peut être mise sous la forme

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} f_1(z_1) & g_1(z_1) & h_1(z_1) \\ f_2(z_2) & g_2(z_2) & h_2(z_2) \\ f_3(z_3) & g_3(z_3) & h_3(z_3) \end{vmatrix} = 0.$$

La relation de la forme plus particulière, et pourtant souvent rencontrée,

$$f_1(z_1) + f_2(z_2) + f_3(z_3) = 0$$

se prête à la représentation par *abaque hexagonal* (M. Lallemand), avec transparent à trois index.

Les procédés employés jusqu'ici permettent quelquefois la figuration d'une relation entre plus de trois variables.

Les abaques hexagonaux sont les plus avantageux de ceux auxquels conduit le principe des lignes concourantes. Mais ils laissent encore subsister certains inconvénients que M. d'Ocagne a fait disparaître dans ses *abaques à points alignés* (dont l'invention est d'ailleurs un peu antérieure à celle des abaques hexagonaux). Considérons la relation (1) comme exprimant, non plus que trois droites sont concourantes, mais que trois points sont en ligne droite. Le nomogramme correspondant sera simplement constitué par trois courbes portant chacune une graduation, et pour s'en servir on n'aura qu'à aligner au moyen d'un fil tendu trois points appartenant respectivement à ces courbes ou *échelles*. Le principe imaginé par M. d'Ocagne est certainement le plus important qui ait été introduit en Nomographie, et il a donné à cette science un essor considérable. Il se prête mieux que tout autre à la représentation des relations entre plus de trois variables.

Un cas particulier important est celui où les trois échelles sont rectilignes et, à cause des facilités de construction qui en résultent, il y a un grand intérêt à reconnaître si une relation donnée est susceptible d'une telle représentation. Le problème donne lieu à une élégante étude géométrique, dans laquelle M. d'Ocagne retrouve, par la considération de ce qu'il appelle les *points critiques*, les résultats qu'il avait obtenus antérieurement d'une manière toute différente et purement algébrique.

Les nomogrammes où figurent une ou plusieurs échelles curvilignes s'appliquent naturellement à des cas plus étendus. L'auteur indique, en particulier, qu'il est possible de construire des abaques permettant de résoudre les équations algébriques jusqu'au septième degré inclusivement, ce qui est une contribution fort intéressante à une question soulevée par M. Hilbert. Il faut encore citer les nomogrammes à *échelles coniques* ou *circulaires* de M. Clark et les recherches ingénieuses de MM. Soreau, Batailler, etc.

Plusieurs relations entre plus de trois variables peuvent être représentées par des nomogrammes *à alignements multiples* ou *à alignements parallèles*, dont l'emploi est presque aussi simple que celui des nomogrammes à alignement unique. M. d'Ocagne montre, d'après M. Soreau, que ce nouveau développement de la théorie peut être rattaché à des considérations de géométrie dans l'espace.

Dans un nomogramme à alignement la relation à figurer est traduite par le fait que certains points doivent être en ligne droite. On peut généraliser le principe en remplaçant cette condition par une autre relation géométrique, qui peut être *a priori* de forme quelconque. Les dispositions les plus intéressantes pratiquement sont celles des nomogrammes *à équerre, à équerre par le sommet, à points équidistants.* On peut enfin avoir des *échelles mobiles,* et le type de nomogramme correspondant comprend la règle à calcul comme cas très particulier.

L'Ouvrage se termine par des considérations d'un ordre très général sur la théorie des abaques. *Toute représentation nomographique, avec éléments mobiles, revient à réaliser quatre contacts simultanés,* en donnant au mot *contact* un sens suffisamment étendu. Ce principe est le point de départ d'une classification qui embrasse tous les nomogrammes connus et tous ceux qui pourront être proposés.

Le Traité de *Calcul graphique et de Nomographie,* rédigé à un point de vue vraiment didactique, avec le soin et l'élégance qui caractérisent les productions de M. d'Ocagne, intéressera de nombreux lecteurs. Les théoriciens seront attirés par les problèmes analytiques et géométriques qui se présentent en foule, dont certains, d'une haute difficulté, attendent encore leur solution (par exemple : *Reconnaître dans le cas général si une relation donnée entre trois variables est réductible à la forme canonique représentable par un nomogramme à points alignés)* ([1]). Et le livre sera bien vu des praticiens, parce que tous ces problèmes se posent naturellement et que la résolution de chacun d'eux se traduit immédiatement par un profit industriel, si l'on peut dire. Par l'heureux équilibre réalisé entre la spéculation et le sentiment de l'utile, M. d'Ocagne montre excellemment ce que doit et ce que peut être un ouvrage de Mathématiques appliquées.

R. B.

([1]) Il convient d'ajouter que l'immense majorité des relations rencontrées dans la pratique s'offrent de prime abord sous forme d'équations d'ordre nomographique 3 ou 4 pour lesquelles la solution complète a été donnée par MM. d'Ocagne et Clark.

LEÇONS ÉLÉMENTAIRES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES, par M. *Édouard-A. Fouët.* 2e édition, entièrement refondue. Tome I : LES FONCTIONS EN GÉNÉRAL. 1 vol. in-8 de XIII-112 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1907. Prix : 3fr,50.

Dans cette deuxième édition de ses intéressantes *Leçons,* l'auteur a mis à contribution les recherches les plus récentes sur la Théorie des Fonctions. On sait quelle place d'honneur occupe cette doctrine dans les travaux des géomètres contemporains. Les personnes curieuses de s'y initier, qui n'ont pas le loisir d'aborder les Mémoires originaux, ou qui craignent de s'y perdre, liront avec le plus grand profit le résumé clair et substantiel de M. Fouët. Les démonstrations ne figurent pas toutes, et l'exposé est parfois forcément un peu sommaire. Mais de nombreuses notes renvoient aux sources le lecteur désireux de compléter sur certains points les indications du texte.

Le volume qui vient de paraître comprend deux Chapitres, intitulés : *les Fonctions en général,* et *les Fonctions analytiques.* Le premier Chapitre est consacré à l'examen des notions de *nombre*, de *fonction* et de *limite.* Vient ensuite un aperçu de la *Théorie des ensembles,* considérée surtout dans ses parties actuellement applicables à l'Analyse, puis une étude de la *Classification des fonctions.* Le second Chapitre concerne les *Fonctions continues,* les *Fonctions analytiques en un point,* les *Fonctions analytiques dans un domaine.* R. B.

EXERCICES DE GÉOMÉTRIE comprenant l'*Exposé des méthodes géométriques et* 2000 *questions résolues,* par *F. G.-M.* — 4e édition, 1907. Tours et Paris, Mame et Poussielgue.

Les *Nouvelles Annales* ont rendu compte des éditions précédentes (1883, p. 516; 1896, p. 246). L'*Intermédiaire des Mathématiciens* a cité cet Ouvrage à diverses reprises, notamment en 1907, page 142. Il nous suffira donc de dire que la *quatrième édition* présente les améliorations suivantes : les renseignements bibliographiques ont été notablement augmentés, grâce surtout à l'*Intermédiaire des Mathématiciens* et à divers autres périodiques [1]. Ces mêmes Ouvrages et des recherches personnelles ont fourni, en outre, des questions nouvelles en assez grand nombre.