NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. VACQUANT

Solution de la question de mathématiques spéciales

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 464-474

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__464_0>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1907).

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES ;

PAR M. A. VACQUANT.

On considère trois axes Ox, Oy, Oz *formant un trièdre trirectangle et les paraboloïdes ayant pour équation, par rapport à ces axes,*

$$x^2 + (y - az)^2 + 2\lambda z - R^2 = 0.$$

a *et* R *étant des constantes et* λ *un paramètre variable.*

I. *Par chacun des points* P, P' *où l'un de ces paraboloïdes rencontre* Oz, *on mène la sphère qui contient les sections circulaires réelles passant par ce point; trouver le lieu de l'intersection des deux sphères relatives à* P *et* P'; *montrer que le plan radical de ces deux sphères est parallèle à un plan fixe et passe par le milieu de* PP'. *Par chacun des points* M *communs à ces deux sphères passe une troisième sphère qui correspond à un autre paraboloïde; quel est le lieu de* M *si cette sphère est fixe?*

II. *Le lieu des sections circulaires rencontrant* Oz *se compose, en général, d'un cône du second degré et d'une surface du troisième degré; montrer que cette dernière peut être engendrée par un cercle assujetti à rencontrer l'axe* Oz *et deux autres droites* *réelles fixes* D, D′ *auxquelles il est constamment orthogonal.*

III. *Trouver les plans qui coupent la surface précédente suivant des cubiques circulaires; montrer que toute sécante menée dans un tel plan, par le point* A *où il rencontre* Oz, *coupe la cubique en des points* S *et* S′ *tels que le produit* $\overline{AS}\,.\,\overline{AS'}$ *soit constant si le plan est fixe.*

Aux points S, S′ *on mène les normales à la cubique; trouver le lieu de leur point de rencontre quand la sécante* SAS′ *varie ainsi que le plan de la courbe.*

1. Les points P et P′ où un paraboloïde ϖ,

$$(\varpi) \qquad x^2+(y-az)^2+2\lambda z-R^2=0,$$

rencontre l'axe des z ont des cotes z', z'' définies par l'équation

$$a^2z^2+2\lambda z-R^2=0,$$

et l'on a

$$z'+z''=-\frac{2\lambda}{a^2}, \qquad z'z''=-\frac{R^2}{a^2}.$$

Le plan xOy, ou $z=0$, coupe les paraboloïdes ϖ, suivant un même cercle

$$x^2+y^2-R^2=0.$$

Par suite, les sections circulaires réelles d'un paraboloïde ϖ sont parallèles aux plans définis par l'équation quadratique

$$x^2+(y-az)^2-(x^2+y^2+z^2)=0$$

ou

$$z[-2ay+(a^2-1)z]=0.$$

La sphère Σ_1 qui contient les sections circulaires de ϖ, passant par P, a pour équation

$$x^2 + (y - az)^2 + 2\lambda z - R^2$$
$$- (z - z')[- 2ay + (a^2 - 1)(z - z')] = 0$$

ou

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ayz' + 2[\lambda + (a^2 - 1)z']z - (a^2 - 1)z'^2 - R^2 = 0.$$

Comme on a

$$\lambda = \frac{R^2 - a^2 z'^2}{2z'}, \qquad \lambda + (a^2 - 1)z' = \frac{R^2 + (a^2 - 2)z'^2}{2z'},$$

l'équation de la sphère Σ_1 peut s'écrire

$$(\Sigma_1) \left\{ \begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 - 2ayz' \\ & \qquad + [R^2 + (a^2 - 2)z'^2]\frac{z}{z'} - (a^2 - 1)z'^2 - R^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

De même, l'équation de la sphère Σ_2 relative au point P′ est

$$(\Sigma_2) \left\{ \begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 - 2ayz'' \\ & \qquad + [R^2 + (a^2 - 2)z''^2]\frac{z}{z''} - (a^2 - 1)z''^2 - R^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

En retranchant membre à membre les deux équations (Σ_1) et (Σ_2), on obtient le plan radical de ces deux sphères, savoir

$$- 2ay(z' - z'') + R^2 z\left(\frac{1}{z'} - \frac{1}{z''}\right)$$
$$+ (a^2 - 2)z(z' - z'') - (a^2 - 1)(z^{2\prime} - z^{2\prime\prime}) = 0,$$

ou, en supprimant le facteur $z' - z''$, et remplaçant $z'z''$ par $\frac{-R^2}{a^2}$,

$$- 2ay + 2(a^2 - 1)z - (a^2 - 1)(z' + z'') = 0.$$

On voit que ce plan, de direction fixe, coupe Oz au point

$$z = \frac{z' + z''}{2} = -\frac{\lambda}{a^2},$$

milieu de PP'. L'équation de ce plan peut s'écrire

$$(1) \qquad -ay + (a^2 - 1)z + (a^2 - 1)\frac{\lambda}{a^2} = 0.$$

D'autre part, en ajoutant membre à membre les équations (Σ_1) et (Σ_2), on obtient l'équation

$$\begin{aligned} 2(x^2 + y^2 + z^2) - 2ay(z' + z'') \\ + R^2 z\left(\frac{1}{z'} + \frac{1}{z''}\right) + (a^2 - 2)z(z' + z'') \\ - (a^2 - 1)[(z' + z'')^2 - 2z'z''] - 2R^2 = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} 2(x^2 + y^2 + z^2) + 4ay\frac{\lambda}{a^2} + 2\lambda z - 2(a^2 - 2)z\frac{\lambda}{a^2} \\ -(a^2 - 1)\left[\frac{4\lambda^2}{a^4} + \frac{2R^2}{a^2}\right] - 2R^2 = 0 \end{aligned}$$

ou

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 \\ & \quad + \frac{2\lambda}{a^2}\left[ay + z - (a^2 - 1)\frac{\lambda}{a^2}\right] - \frac{R^2}{a^2}(2a^2 - 1) = 0. \end{aligned} \right.$$

On aura le lieu de l'intersection des sphères Σ_1 et Σ_2 en éliminant λ entre les équations (1) et (2), ce qui donne la quadrique

$$(Q) \quad \left\{ \begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 \\ & \quad + \frac{2a^2}{a^2 - 1}z[ay - (a^2 - 1)z] - \frac{R^2}{a^2}(2a^2 - 1) = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette quadrique Q a pour centre l'origine, pour un de ses axes Ox, pour directions de sections circulaires les plans

$$z = 0, \qquad ay - (a^2 - 1)z = 0,$$

ce dernier étant parallèle à (1), comme cela devait être.

On voit aisément le genre de cette quadrique par le procédé de la décomposition en carrés (Q peut être un hyperboloïde réglé, ou un cône, ou un hyperboloïde non réglé, ou une quadrique imaginaire).

Soit $M(x_0, y_0, z_0)$ un point appartenant à l'intersection des sphères Σ_1 et Σ_2. Par tout point N de Oz, d'ordonnée γ, passe un paraboloïde ϖ auquel correspond une sphère Σ, passant par N, et ayant pour équation

$$(\Sigma)\quad \left\{\begin{aligned} & x^2+y^2+z^2 \\ & \quad -2ay\gamma+[R^2+(a^2-2)\gamma^2]\frac{z}{\gamma}-(a^2-1)\gamma^2-R^2=0. \end{aligned}\right.$$

Pour que cette sphère Σ passe par le point $M(x_0\, y_0\, z_0)$ on doit avoir

$$\begin{aligned} x_0^2+y_0^2+z_0^2-2ay_0\gamma+[R^2+(a^2-2)\gamma^2]\frac{z_0}{\gamma} \\ -(a^2-1)\gamma^2-R^2=0, \end{aligned}$$

équation du troisième degré en γ dont les racines sont z', z'' donnant les sphères Σ_1 et Σ_2 relatives à un paraboloïde ϖ, de paramètre λ, et z''' donnant une troisième sphère Σ_3.

On a

$$z'z''z'''=\frac{R^2z_0}{a^2-1},$$

et, comme

$$z'z'=-\frac{R^2}{a^2},$$

on aura

$$z'''=-\frac{a^2}{a^2-1}z_0.$$

Cette troisième sphère correspond à un autre paraboloïde ϖ_1 dont la valeur λ_1 du paramètre λ est

$$\lambda_1=\frac{R^2-a^2z'''^2}{2z'''}.$$

L'équation de la sphère Σ_3 s'obtient en remplaçant γ par z''' ou $\frac{-a^2}{a^2-1}z_0$ dans l'équation (Σ). On voit que les coefficients de cette équation ne dépendent que du paramètre z'''. Donc, pour que la sphère Σ_3 soit fixe, il faut et il suffit que z''' soit constant, et, par suite, que z_0 soit constant. Le lieu de M est donc une section circulaire

$$z = \text{const.}$$

de la quadrique Q.

II. Le lieu des sections circulaires C_1 rencontrant Oz et parallèles au plan $z=0$ s'obtient en éliminant z' entre les équations (Σ_1) et

$$z - z' = 0,$$

ce qui donne le cône du second degré

$$x^2 + y^2 - 2ayz = 0,$$

ayant O pour sommet et pour l'un de ses axes Ox.

Le lieu des sections circulaires C_2, rencontrant Oz et parallèles au plan

$$-2ay + (a^2-1)z = 0,$$

s'obtient en éliminant z' entre les équations

$$(\Sigma_1)\quad \left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2-2ayz' \\ \quad +[R^2+(a^2-2)z'^2]\dfrac{z}{z'}-(a^2-1)z'^2-R^2=0 \end{array}\right.$$

et

$$-2ay + (a^2-1)(z-z') = 0,$$

définissant un cercle C_2. En tirant $2ay$ de cette dernière équation et portant dans l'équation (Σ_1), celle-ci devient

$$x^2+y^2+z^2-(a^2-1)z'(z-z')$$
$$+\left[R^2+(a^2-2)z'^2\right]\frac{z}{z'}-(a^2-1)z'^2-R^2=0$$

ou

$$(x^2+y^2+z^2-zz')z'+R^2(z-z')=0.$$

Comme

$$z-z'=\frac{2a}{a^2-1}y,$$

le lieu cherché est la surface du troisième degré S_3 ayant pour équation

$$\left(x^2+y^2+\frac{2a}{a^2-1}yz\right)\left(z-\frac{2a}{a^2-1}y\right)+\frac{2aR^2}{a^2-1}y=0$$

ou

$$(S_3)\qquad \begin{cases} \left[x^2+y\left(y+\dfrac{2a}{a^2-1}z\right)\right] \\ \quad\times\left[-2ay+(a^2-1)z\right]+2aR^2y=0. \end{cases}$$

Cette surface admet yOz pour plan de symétrie; elle passe par O et admet pour plan tangent en ce point le plan

$$y=0,$$

ou xOz, coupant S_3 suivant les droites

$$x^2z=0,$$

c'est-à-dire Ox et Oz comptée deux fois.

On peut considérer la surface S_3 comme engendrée par les cercles C_2 qui rencontrent Oz et deux autres droites D, D' perpendiculaires au plan

$$(\delta)\qquad -2ay+(a^2-1)z=0,$$

et, par suite, orthogonales aux cercles C_2 parallèles à ce plan δ. En effet, si l'on coupe la surface S_3 par un plan passant par Ox et perpendiculaire à δ, savoir

$$y + \frac{2a}{a^2-1} z = 0,$$

on obtient une section définie par l'équation précédente et la suivante,

$$x^2\left(\frac{4a^2}{a^2-1} + a^2 - 1\right)z - \frac{4a^2}{a^2-1} R^2 z = 0$$

ou

$$(a^2+1)^2 x^2 z - 4a^2 R^2 z = 0.$$

La section se compose donc de la droite Ox, ce qui devait être, et des droites parallèles D et D′, ayant pour équations

$$y + \frac{2a}{a^2-1} z = 0,$$

$$x = \pm \frac{2aR}{a^2+1},$$

évidemment réelles, et rencontrant orthogonalement les cercles C_2.

III. Le cône des directions asymptotiques de la surface S_3 se compose du cône du second degré

(1) $$x^2 + y^2 + \frac{2a}{a^2-1} yz = 0$$

et du plan

(2) $$-2ay + (a^2-1)z = 0.$$

Pour qu'un plan coupe la surface S_3 suivant une cubique circulaire, il faut et il suffit qu'il soit parallèle à deux génératrices communes au cône des directions asymptotiques de S_3 et au cône isotrope

(3) $$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Par l'intersection des cônes (1) et (3) on peut faire passer seulement deux plans réels, d'après la théorie des sections circulaires, ayant pour équation quadratique

$$x^2+y^2+\frac{2a}{a^2-1}yz-(x^2+y^2+z^2)=0$$

ou

$$z\left(\frac{2a}{a^2-1}y-z\right)=0.$$

Ces deux plans $z=0$ et

$$(2)\qquad y=\frac{a^2-1}{2a}z$$

sont les directions des plans cherchés. Les plans parallèles à (2) donnent les cercles générateurs de S_3 plus une droite à l'infini, et les plans parallèles à

$$z=0$$

donnent des cubiques circulaires Γ représentées par les équations

$$(4)\qquad z=h$$

et

$$\left(x^2+y^2+\frac{2ah}{a^2-1}y\right)[-2ay+(a^2-1)h]+2aR^2y=0.$$

Cette dernière s'écrit

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} 2ay(x^2+y^2)-(a^2-1)hx^2 \\ \quad +\dfrac{h}{a^2-1}[4a^2-(a^2-1)^2]y^2-2a(h^2+R^2)y=0. \end{array}\right.$$

Une cubique Γ rencontre Oz en un point A, et une sécante issue de A la coupe en des points S et S' projetés en s et s' sur xOy tels que

$$\overline{AS}.\overline{AS'}=\overline{Os}.\overline{Os'}=\rho'\rho'',$$

en désignant par ρ' et ρ'' les rayons vecteurs non nuls de la cubique (5) correspondant à une droite issue de O. En remplaçant, dans (5), x par $\rho\cos\omega$ et y par $\rho\sin\omega$, on en déduit

$$\rho'\rho'' = \frac{-2a(h^2+R^2)\sin\omega}{2a\sin\omega} = -(h^2+R^2)$$

et, par suite,

$$\overline{AS}.\overline{AS'} = \rho'\rho'' = -(h^2+R^2).$$

Cette relation montre que la cubique Γ est anallagmatique, A étant un pôle d'inversion, $-(h^2+R^2)$ la puissance de l'inversion. La cubique (5), egale à Γ, est anallagmatique, O étant pôle et $-(h^2+R^2)$ puissance d'inversion. Le lieu des points de rencontre des normales en S et S′ à Γ se projette en vraie grandeur sur xOy suivant le lieu des points de rencontre des normales à la cubique (5) aux points s et s'. Or, un cercle tangent à (5) au point s et qui passe par s' est aussi tangent à (5) au point s', comme le montre l'inversion précédente appliquée à ce cercle et à la cubique (5). Le lieu cherché, dans le plan $z=h$, étant projeté sur xOy, est donc le lieu du centre c de ce cercle. Si α et β désignent les coordonnées de c, ce cercle a pour équation

$$(c) \qquad x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y-(h^2+R^2)=0.$$

Il coupe la cubique (5) en des points situés sur la conique

$$2ay(2\alpha x+2\beta y+h^2+R^2)-(a^2-1)hx^2 + \frac{h}{a^2-1}[4a^2-(a^2-1)^2]y^2-2a(h^2+R^2)y=0$$

ou

$$(c_1) \quad \left\{ \begin{aligned} &(a^2-1)hx^2-4a\alpha xy \\ &\qquad + \left\{ \frac{h}{a^2-1}[(a^2-1)^2-4a^2]-4a\beta \right\} y^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Or, le cercle (c) et la conique (c_1) doivent être bitangents aux points s et s' de la corde sOs'; comme la conique c_1 représente deux droites passant par O, il faut que ces deux droites soient confondues, ce qui donne, pour lieu de c, la parabole

$$4a^2\alpha^2 - (a^2-1)h\left\{\frac{h}{a^2-1}[(a^2-1)^2 - 4a^2] - 4a\beta\right\} = 0$$

ou

$$(6) \qquad 4a^2\alpha^2 + 4a(a^2-1)h\beta + h^2[4a^2 - (a^2-1)^2] = 0.$$

Le point de rencontre C des normales à Γ aux points S et S′ a pour coordonnées α, β et $\gamma = h$. Le lieu de C quand la sécante SAS′ varie et quand h varie, c'est-à-dire le lieu demandé, s'obtient en remplaçant dans (6) h par γ; c'est donc le cône du second degré

$$(7) \qquad 4a^2\alpha^2 + 4a(a^2-1)\beta\gamma + [4a^2 - (a^2-1)^2]\gamma^2 = 0.$$