Certificats de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 405-413

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__405_1>

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Bordeaux.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Réduction d'un système de vecteurs parallèles.*

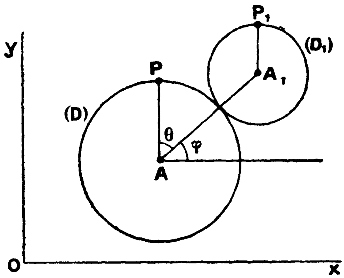
II. *Étude de l'effet des percussions appliquées à un solide mobile autour d'un axe fixe.*

Cas où la fixité de l'axe est obtenue par celle de deux de ses points; détermination des percussions subies par ces points.

Centre de percussion.

III. *Deux disques circulaires infiniment minces* (D) *et* (D_1), *homogènes et pesants, glissent sans frottement sur un plan horizontal* xOy. *Ils sont assujettis, de plus, à rouler (sans glisser) l'un sur l'autre. Leurs masses* M *et* M_1 *sont inversement proportionnelles à leurs rayons* R *et* R_1, *et chaque point matériel de ces disques est attiré par l'origine* O *proportionnellement à sa masse et à sa distance au point* O, *le coefficient de proportionnalité étant égal à* ω^2.

On désignera par ξ, η *les coordonnées du centre de gravité du système des deux disques, par* φ *l'angle du segment* $\overline{AA_1}$ *avec* Ox, *et par* θ *l'angle que fait avec* $\overline{AA_1}$ *le* *rayon matériel* $\overline{AP}$ *qui, à l'époque initiale, coïncidait avec* $\overline{AA_1}$. *Ces angles sont comptés positivement dans le sens de* Ox *vers* Oy.



Étudier le mouvement du système avec les conditions initiales suivantes :

$$\xi_0 = 2R, \qquad \eta_0 = 0, \qquad \varphi_0 = 0, \qquad \theta_0 = 0,$$
$$\xi'_0 = 0, \qquad \eta'_0 = 2R\omega, \qquad \varphi'_0 = \omega, \qquad \theta'_0 = -2\omega.$$

Quels sont, au point de vue cinématique, et pour ces conditions initiales, les mouvements absolus des centres (D) *et* (D_1)?

Épreuve pratique. — Mouvement d'un tore autour d'un point fixe. — *Un tore, homogène et pesant, dont le cercle générateur a un rayon* $\alpha = 2^{cm}$ *et a son centre à une distance* $d = 15^{cm}$ *de l'axe de rotation, tourne avec une vitesse de* 5000 *tours par minute autour de cet axe. La distance* l *de son centre de masse au point fixe de cet axe est* 1^{cm}, *et l'inclinaison initiale* θ_0 *de l'axe sur la verticale ascendante est de* 50 *grades.*

Déterminer la durée T *et l'amplitude* Θ *de la nutation, la vitesse* Ψ' *de la précession moyenne et le temps* T' *que l'axe du tore met à faire une révolution complète autour de la verticale.*

$$g = 981 \left(\frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}\right).$$

(Juillet 1907.)

Caen.

Épreuve théorique. — I. *Un octaèdre régulier homogène, de masse* M, *d'arête* $a\sqrt{2}$, *peut tourner autour du som-*

met O *qui est fixe: aucun de ses points n'est sollicité par des forces extérieures, sauf le sommet* S, *opposé à* O, *qui est attiré vers un point fixe* P *par une force* $\frac{1}{3}\frac{M\omega^2 a^4}{\overline{SP}^3}$, OP *étant égal à* $4a$; *à l'instant initial, l'octaèdre tourne avec la vitesse* ω *autour de l'axe instantané* OS *et* POS *est droit. Mouvement de l'octaèdre : trajectoire du point* S.

SOLUTION.

Moments d'inertie en O : $A = B = \frac{6}{5}Ma^2$, $C = \frac{1}{5}Ma^2$.

Les théorèmes généraux donnent :

$$r = \varphi' + \psi'\cos\theta = \omega, \qquad \frac{6}{5}Ma^2\psi'\sin^2\theta + \frac{1}{5}Ma^2 r\cos\theta = 0,$$

$$\frac{6}{5}Ma^2(\theta'^2 + \psi'^2\sin^2\theta) = \frac{Ma^2\omega^2}{12}\left(\frac{1}{5 - 4\cos\theta} - \frac{1}{5}\right).$$

On trouve, pour la trajectoire du point S :

$$\sin\theta\frac{d\psi}{d\theta} = \frac{\sqrt{\cos\theta(5 - 4\cos\theta)}}{\sqrt{(1 - 2\cos\theta)(2 - \cos\theta)}}.$$

II. *Un point* M, *de masse* 1, *se meut sur l'axe* X'OX *sous l'action d'une force* $X = -\varphi(x)$; *il éprouve, en sens contraire de sa vitesse, une résistance* $\frac{2v^2}{a + x}$, a *étant une constante positive; pour* $t = 0$, v *est nul*, x *a une valeur positive* x_0. *Déterminer* $\varphi(x)$ *de manière que* M *arrive à l'origine* O *en un temps* T *indépendant de* x_0; *dire en quel point il s'arrête et quelle est l'équation du mouvement ultérieur.*

SOLUTION.

$$d\frac{1}{2}v^2 = \frac{2v^2\,dx}{a + x} - \varphi(x)\,dx,$$

l'analyse de V. Puiseux donne $\varphi(x) = \frac{\pi^2 x(a + x)}{4T^2}$; puis on trouve

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a + x} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a + x_0}\right)\cos\frac{\pi t}{2T}.$$

M s'arrête pour $x = -\frac{a x_0}{a + 2 x_0}$; pour l'équation du mouvement ultérieur, on change le signe du deuxième terme : il n'y a plus tautochronisme.

Épreuve pratique. — *Un fil homogène, long de* 2^m, *pesant* 2^g, *a ses extrémités fixées en deux points* A, B *d'une horizontale; il porte un anneau* M *pesant* 2^g *et pouvant glisser sur le fil. Calculer, à* $0^m,0001$ *près, la distance* AB *et la distance de cette droite au point qui supporte l'anneau.*

(Juillet 1907.)

Grenoble.

Problème. — *Un solide* S *est mobile autour d'un axe vertical fixe dirigé vers le bas. Un second solide* S' *est mobile autour d'un axe horizontal* Ox *invariablement lié à* S *et rencontrant* Oz_1 *au point* O. *L'axe* Ox *est axe principal d'inertie de* S' *relativement au point* O; *les deux autres axes principaux sont appelés* Oy *et* Oz.

Soient Ox_1 Oy_1 *deux axes rectangulaires horizontaux fixes; on désigne par* ψ *l'angle* $\widehat{x_1 O x}$ *et par* θ *l'angle* $\widehat{z_1 O z}$. *On appelle* I *le moment d'inertie de* S *relativement à* Oz_1, A, B, C *ceux de* S' *relatifs à* Ox, Oy *et* Oz. *Le centre de gravité* G *de* S' *est supposé situé sur* Oz *à une distance* a *du point* O.

Le solide S' *est pesant et les liaisons sont sans frottement.*

Écrire les équations différentielles du mouvement du système; montrer qu'elles s'intègrent par quadratures. On ne demande pas de discussion.

Les réactions correspondant aux liaisons auxquelles S' *est assujetti sont réductibles à une force passant par* O *et à un couple. Montrer que l'axe de ce couple est normal au plan* xOz_1 *et indiquer une méthode pour calculer le moment de ce couple.*

Solution.

Les équations différentielles s'obtiennent aisément, soit par la méthode de Lagrange, soit par les théorèmes généraux.

En ce qui concerne les réactions de S′, les liaisons permettent a chaque instant une rotation autour de Oz_1 et une rotation autour de Ox; le moment des forces de liaisons relatif à ces deux axes est donc nul. On connaît dès lors la direction de l'axe du couple des réactions, on en calcule le moment en utilisant, par exemple, les équations d'Euler relatives à S′ et aux axes Oy et Oz.

Epreuve pratique. — *Deux cercles homogènes de même masse m, de même rayon a, sont assujettis à rester dans un plan vertical et à rouler sans glisser sur une horizontale fixe de ce plan. Leurs centres* C, C′ *sont réunis par une barre homogène de masse* M, *de longueur l ($l > 2a$). De plus, deux points* B, B′ *de ces cercles, situés à la même distance b de leurs centres, sont réunis par une barre de masse μ, de même longueur que la précédente. Cette barre* BB′ *est une bielle d'accouplement : la figure* CBB′C′ *est donc un parallélogramme articulé.*

Exprimer l'absence de glissement par une relation liant l'abscisse x du milieu A *de* CC′ *et l'angle θ que fait* CB *avec Ox. Quelle doit être une force appliquée en* A *pour maintenir le système en équilibre, l'angle θ ayant une valeur donnée ? (Les diverses pièces du système sont pesantes.)*

Calculer la force vive du système en mouvement en fonction de θ et de $\frac{d\theta}{dt} = \theta'$. Former l'équation du mouvement du système, les forces données se réduisant aux poids des différentes pièces.

Trouver la durée des petites oscillations au voisinage d'une position d'équilibre stable.

Le système étant au repos dans une position d'équilibre stable, on suppose qu'un point matériel de masse m' animé d'une vitesse V *faisant avec Ox un angle de* 30° *et dirigée vers le bas vienne heurter la barre* CC′ *en son milieu et reste fixé en ce point. Déterminer la distribution des vitesses dans le système ainsi modifié, immédiatement après le choc.*

Nota. — *Les liaisons sont sans frottement.*

(Juillet 1907.)

Lille.

COURS. — 1° *Variation de la force vive d'un solide libre à la suite d'une percussion. Introduction du paramètre de percussion.*

2° *Conservation de la force vive dans le choc de deux corps libres parfaitement élastiques. Perte de force vive dans le choc de deux corps libres quelconques.*

PROBLÈMES. — I. CINÉMATIQUE. — *Soient dans un plan fixe* Ox, Oy *deux axes rectangulaires; le plan d'un angle droit* $X\Omega Y$ *se meut sur ce plan fixe. Le sommet* Ω, *de coordonnées* (a, b) *par rapport à* Ox, Oy, *décrit la parabole* $b^2 = 2pa$; *l'angle* α *de* ΩX *avec* Ox *a pour mesure* $-\frac{b}{p}$ *en fonction de la position de* Ω *et* $m\log(1+t)$ *en fonction du temps* t *(*p *et* m *sont deux constantes). Déterminer analytiquement la base, la roulante, le lieu du centre géométrique des accélérations et le lieu du centre proprement dit des accélérations.*

II. DYNAMIQUE. — *Un ellipsoïde homogène pesant à surface dépolie est mobile autour de son centre; il reste en contact avec un plan dépoli sur lequel il roule et pivote sans glisser. Étudier son mouvement et reconnaître qu'il coïncide avec un mouvement de Poinsot. On néglige les frottements de roulement et de pivotement.*

(Juillet 1907.)

Marseille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Un canal circulaire homogène peut tourner autour de l'un de ses diamètres qui est vertical et qui est fixe.*

Dans ce canal se meut un point pesant dont la masse est la moitié de celle du canal.

Trouver le mouvement de ce système et la pression du point sur le canal.

A l'instant initial, le rayon qui passe par le point est horizontal, la vitesse relative du point sur le canal est nulle, et le canal tourne avec une vitesse angulaire ω

telle que $g = R\omega^2$, *en désignant par* g *l'accélération due à la pesanteur et par* R *le rayon du canal.*

Le mouvement est-il ou n'est-il pas périodique ?

SOLUTION.

Soit φ l'angle du plan du canal avec un plan vertical fixe, soit θ l'angle que fait avec l'horizontale le rayon qui passe par le point mobile; cet angle étant compté au-dessous de l'horizontale, le théorème des moments donne

$$(1 + \cos^2\theta)\varphi' = 2\omega.$$

Le théorème des forces vives donne

$$(1 + \cos^2\theta)\varphi'^2 + \theta'^2 = 2\omega^2 \sin\theta + 2\omega^2.$$

On tire de là

$$\theta'^2 = \frac{2\omega^2 \sin\theta(2 + \sin\theta)(1 - \sin\theta)}{1 + \cos^2\theta}.$$

Donc θ part de zéro et tend vers $\frac{\pi}{2}$ quand t augmente indéfiniment.

Le mouvement n'est pas périodique, et $\frac{d\varphi}{dt}$ tend vers 2ω, c'est-à-dire vers le double de la vitesse initiale.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un tube creux en fer est horizontal. Il est encastré par l'une de ses extrémités dans un mur vertical; il porte à l'autre extrémité un poids* P.

La partie saillante du tube a 3^{m} *de long. Le rayon intérieur du tube est* 2^{cm}, *le rayon extérieur est* 3^{cm}. *Le poids spécifique du fer est* 7,7.

On demande quel sera le poids P *si le tube travaille au maximum à* 10^{kg} *par millimètre carré, et quel sera alors l'abaissement de l'extrémité libre du tube.*

On tiendra compte du poids du tube.

(Juillet 1907.)

Montpellier.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Supposant connus le principe des vitesses virtuelles et le théorème de d'Alembert, éta-*

blir les équations de Lagrange dans le cas d'un système holonome.

Considérer le cas d'un système non holonome.

II. *Une circonférence de cercle, parfaitement rigide, de rayon égal à l'unité, est animée d'un mouvement de rotation uniforme, de vitesse angulaire* ω, *autour d'un axe fixe passant par son centre et perpendiculaire à son plan. Un point matériel non pesant* M, *de masse égale à l'unité, mobile dans le plan de la circonférence, glisse sans frottement sur le côté intérieur de cette circonférence. Ce point est relié à un point* A, *fixe sur la circonférence, par un fil élastique sans masse. Lorsque le fil a pour longueur* 1, *sa tension est nulle; lorsque sa longueur est égale à* l, *sa tension est* $k(l-1)$, k *étant une constante positive. Le point* M *étant placé à la distance* 2 *du point* A, *on le lance sur la circonférence avec la vitesse relative* v_0. *Étudier le mouvement relatif du point* M *sur la circonférence; reconnaître si, au début du mouvement, le point quitte la circonférence. Si ce cas se présente, on ne poursuivra pas l'étude du mouvement.*

Epreuve pratique. — *On considère le mouvement du plan* P *sur un plan fixe* Π.

On suppose que le point J *de* P, *dont l'accélération est nulle, coïncide à chaque instant avec un point fixe de* P, *et que le centre instantané* I *décrit sur* P *une droite fixe* D.

Trouver des trajectoires sur le plan Π *des points* I *et* J.

Rennes.

Epreuve théorique. — I. *Établir les équations d'Euler pour le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe. Intégrales premières dans le cas où il n'existe pas de forces extérieures.*

II. *Étudier le mouvement de la machine d'Atwood, en tenant compte du poids du fil.*

On supposera que la machine se réduit à une poulie sur laquelle passe un fil matériel homogène, pesant, *dont les extrémités pendent verticalement et supportent des poids inégaux.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une plaque carrée homogène pesante peut osciller librement autour d'un de ses côtés. Trouver la période des oscillations : 1° quand le côté considéré est vertical ; 2° quand il forme avec l'horizon un angle donné* φ.

Application numérique :

$$\varphi = 45^\circ,$$

$$\text{côté du carré} = 1^{\text{m}},$$

$$g = 9,81 \left(\frac{m}{\text{séc}^2}\right).$$

(Juin 1907.)