Nouvelles annales de mathématiques

Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 373-381

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__373_1>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Bordeaux.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *On donne une courbe gauche* C *et une sphère* Σ *ayant pour équation, en coordonnées rectangulaires,*

$$x^2+y^2+z^2=a^2.$$

Démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour que les tangentes à la courbe C *soient tangentes à la sphère* Σ *est que les coordonnées* x, y, z *d'un point* M *mobile sur la courbe* C *satisfassent à la relation différentielle*

$$(x^2+y^2+z^2)(dx^2+dy^2+dz^2)-(x\,dx+y\,dy+z\,dz)^2=a^2(dx^2+dy^2+dz^2).$$

Calculer la longueur d'un arc de la courbe C *en fonction des coordonnées des extrémités de l'arc.* (*On exclut le cas où la courbe* C *est tracée sur la sphère* Σ.)

Montrer géométriquement *que le plan osculateur en un point quelconque de la courbe* C *est tangent à la sphère* Σ.

On déterminera ensuite la courbe C *par la condition qu'elle soit située sur le cylindre de révolution d'axe* Oz *et de rayon donné* b. *On formera, dans ce cas, l'équation du plan osculateur et l'on calculera le rayon de courbure et le rayon de torsion en un point quelconque de* C.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Étant données les deux équations* *différentielles linéaires*

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left[\frac{1}{\sqrt{1+x}}-2x-\frac{1}{x}\right]\frac{dy}{dx}$$
$$+\left[\frac{1}{4(1+x)}-\frac{4x^3+4x^2+3x+2}{4x(1+x)\sqrt{1+x}}\right]y=0,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left[\frac{1}{\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2x}\right]\frac{dy}{dx}$$
$$+\left[\frac{1}{4(1+x)}+\frac{1}{4x(1+x)\sqrt{1+x}}-\frac{1}{4\sqrt{x(1+x)}}\right]y=0,$$

montrer qu'elles admettent une solution commune, puis intégrer complètement chacune des deux équations.

(Juillet 1907.)

Caen.

I. *Former, en coordonnées rectangulaires, l'équation d'une surface* S *contenant la parabole*

$$x=\mathrm{R},\qquad y^2=2az$$

et telle que le plan tangent en un point M *de* S *rencontre, à une distance* R *de l'origine, la droite allant de cette origine à la projection du point* M *sur le plan* OXY.

Solution.

On trouve une équation linéaire et l'on a l'intégrale

$$z=\mathrm{R}\,\frac{x^2+y^2-\mathrm{R}x\pm(\mathrm{R}-x)\sqrt{x^2+y^2}}{2ax}\,.$$

II. *Trouver les trajectoires orthogonales d'une famille de cercles qui ont leur centre en un point de la droite*

$$z=0,\qquad x=a,$$

et qui sont tangents à OZ *au point* O. *Reconnaître que ce sont des cercles situés dans des plans parallèles à* OY, *les axes étant rectangulaires.*

Solution.

Les coordonnées d'un point des cercles donnés sont

$$x = a(1 + \cos u), \qquad y = a(1 + \cos u)\tang v, \qquad z = a\frac{\sin u}{\cos v};$$

les trajectoires sont déterminées par l'équation

$$\frac{du}{\sin u} = \frac{\sin v\, dv}{\cos v},$$

$$Cx + z - 2Ca = 0; \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2Caz = 0.$$

(Juillet 1907.)

Grenoble.

Épreuve théorique. — *On considère la surface* S *définie par les équations*

$$\begin{aligned} x &= -u^3 + 3uv^2 + 3u, \\ y &= -3u^2v + v^3 - 3v, \\ z &= 3u^2 - 3v^2, \end{aligned}$$

dans lesquelles u, v *sont des variables indépendantes, et l'on demande de déterminer :*

1° *Le plan tangent en un point de* S;

2° *L'arête de rebroussement d'une développable circonscrite à* S, *le long d'une des courbes coordonnées* $u =$ const., *ou* $v =$ const.;

3° *Les lignes asymptotiques de* S;

4° *Les lignes de courbure de* S;

5° *Les rayons principaux en un point de* S.

Épreuve pratique. — *Intégration de l'équation*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - (x+1)\frac{dy}{dx} + 3(x-2)y = \frac{x^2 - 6x + 7}{(x-1)^3}e^{3x}.$$

(Juillet 1907.)

Lille.

Question de cours. — 1° *On suppose que les coordonnées* x, y *d'un point quelconque d'une courbe plane sont* *des fonctions elliptiques d'un paramètre t. Démontrer que cette courbe est algébrique et calculer le nombre de ses points doubles.*

2° *Démontrer que les coordonnées d'un point quelconque sur une cubique sans point double peuvent être exprimées par des fonctions elliptiques d'un paramètre.*

3° *Même question pour une courbe algébrique quelconque de genre* un.

PROBLÈME. — 1° *On donne l'équation aux dérivées partielles de premier ordre :*

$$(z - px - qy)^2 + \frac{q}{yz} = 0.$$

Démontrer qu'il existe, comme surfaces intégrales, certaines quadriques admettant pour axes les axes de coordonnées.

2° *En déduire l'intégrale générale.*

3° *Déterminer celle des surfaces intégrales qui passe par la courbe*

$$x^2 + z^2 = 1, \qquad x^2 + y^2 = \frac{1}{4}.$$

(Juillet 1907.)

Marseille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *Démontrer que le rapport anharmonique de quatre intégrales particulières d'une équation dite* de Riccati *de la forme*

$$\frac{dy}{dx} + a + by + cy^2 = 0,$$

où a, b, c sont des fonctions de la variable x, ne dépend pas de x.

2° *Intégrer l'équation aux dérivées partielles*

$$px^n + qy^n = z^n,$$

où n est un nombre entier positif ou négatif.

Déterminer la surface qui satisfait à cette équation et qui contient la droite dont les équations en coordonnées *rectangulaires sont*

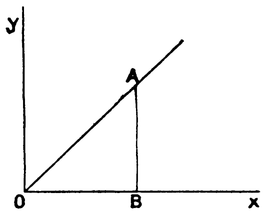
$$z = 1, \qquad x = y\sqrt{2}.$$

Examiner les cas particuliers où l'on a : $n = \pm 1$, $n = 0$ *et, dans le cas de* $n = -1$, *indiquer les lignes de courbure de la surface.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *La variable complexe*

$$z = x + y\sqrt{-1}$$

étant représentée par un point dans un plan, on trace les



parties positives des axes Ox *et* Oy *et la bissectrice de leur angle. On prend sur cette bissectrice un point* A *que l'on projette en* B *sur* O x *et l'on demande :*

1° *D'évaluer l'intégrale* $\int e^{-z^2}dz$, *prise dans un sens quelconque le long du contour formé par les trois côtés du triangle* OAB ;

2° *De démontrer que l'expression*

$$x\int_0^x e^{y^2}dy - e^{x^2} + 1$$

est négative pour toute valeur positive de x *et qu'il en résulte que le module de l'intégrale* $\int e^{-z^2}dz$, *prise sur le seul côté* AB, *tend vers zéro quand le point* A *s'éloigne indéfiniment sur* OA ;

3° *De trouver, dans les mêmes conditions, la limite de l'intégrale* $\int_{OA} e^{-z^2}dz$, *calculée sur* OA.

NOTA. — *On rappelle la formule réelle*

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

(Juillet 1907.)

Montpellier.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Une surface étant rapportée à des axes rectangulaires, la normale au point* M *coupe le plan* XOY *en* A; *ce point* M *se projette en* P *sur le même plan* XOY :

1° *Former l'équation aux dérivées partielles des surfaces telles que la bissectrice de l'angle* AOP *se confonde avec la bissectrice des axes* XOY;

2° *Intégrer cette équation, et former l'équation générale de ces surfaces;*

3° *Déterminer la surface particulière* S *qui passe par la circonférence intersection du plan $x = y$ et de la sphère*

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 + z^2 = 4a^2;$$

4° *Déterminer les lignes de courbure des deux systèmes de la surface* S;

5° *Montrer que les lignes de courbure de chaque système passent par deux points fixes et sont des circonférences.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Calculer la surface du paraboloïde*

$$xy = az$$

qui est intérieure au cylindre fermé

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy;$$

2° *Calculer le volume compris à l'intérieur du cylindre, limité par le paraboloïde et par le plan xOy.*

Les axes sont supposés rectangulaires et $a > 0$.

(Juillet 1907.)

Rennes.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. ANALYSE. — *Les formules*

$$(I)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= x(1+zt),\\ y_1 &= y(1+zt),\\ z_1 &= \frac{z}{1-zt}, \end{aligned}\right.$$

où t désigne un paramètre, définissent une correspondance entre le point M (x, y, z) *et le point* $M_1(x_1, y_1, z_1)$.

1° *Montrer que* $\frac{\partial x_1}{\partial t}$, $\frac{\partial y_1}{\partial t}$, $\frac{\partial z_1}{\partial t}$ *peuvent s'exprimer en fonction de* x_1, y_1, z_1.

2° *Si l'on donne à t une valeur constante,* x_1, y_1, z_1 *deviennent les fonctions de* x, y, z, *et l'expression*

$$x_1 z_1\, dx_1 + y_1 z_1\, dy_1 - z_1^2\, dz_1 - (xz\, dx + yz\, dy - z^2\, dz)$$

peut être mise sous la forme

$$P\, dx + Q\, dy + R\, dz,$$

P, Q, R *étant des fonctions de* x, y, z. *Calculer l'intégrale de différentielle totale*

$$\int P\, dx + Q\, dy + R\, dz$$

et montrer qu'elle se réduit à une fonction rationnelle de x, y, z.

3° *Le paramètre t ayant une valeur déterminée quand le point* M (x, y, z) *décrit une courbe fermée* (C), *le point correspondant* M_1 *décrit une courbe fermée* (C_1). *Vérifier que l'on a*

$$\int_{(C_1)} x_1 z_1\, dx_1 + y_1 z_1\, dy_1 - z_1^2\, dz_1 = \int_{(C)} xz\, dx + yz\, dy - z^2\, dz.$$

4° *Transformer par la formule de Stokes l'intégrale curviligne*

$$\int_{(C)} xz\, dx + yz\, dy - z^2\, dz$$

et montrer que cette intégrale est nulle quand la courbe fermée (C) *est sur une surface de révolution autour de* OZ.

II. Géométrie. — *On donne une famille de courbes* (C) *dépendant d'un paramètre* v. *Ces courbes sont tracées sur un cylindre de révolution de rayon* r, *d'axe* Oz, *et passent par le point* A *de rencontre de* Ox *et du cylindre. Soient*

$$x = r\cos u, \qquad y = r\sin u, \qquad z = r\,\varphi(u, v)$$

les équations déterminant cette famille.

On porte sur la tangente, en un point quelconque M′ *d'une courbe* (C) *déterminée, un segment* M′M *tel que*

$$\text{arc AM}' + \text{M}'\text{M} = l,$$

l *étant une constante donnée. Lorsque le point* M′ *décrit la courbe* (C) *choisie, le point* M *décrit une développante* (D) *de cette courbe et, lorsque* (C) *varie, cette développante* (D) *engendre une surface* (Σ).

1° *Lorsque les courbes* (C) *sont des hélices, trouver en fonction des deux paramètres* u *et* v *les coordonnées d'un point quelconque de la surface* (Σ). *Montrer que la surface* (Σ) *reste normale à* M′M, *trouver ses lignes de courbures, étudier leurs particularités et en déduire des générations simples de cette surface.*

2° *Les courbes* (C) *étant quelconques, démontrer géométriquement, en utilisant les propriétés des développées, que, pour que les développantes* (D) *soient lignes de courbure de la surface* (Σ), *il faut et il suffit que la normale en* M *à la surface fasse un angle constant avec la direction* MM′.

Épreuve pratique. — *Étant donnée l'équation aux différentielles totales*

$$(yz + a^2)\,\frac{dx}{x} + (xz + a^2)\,\frac{dy}{y} - (x+y)\,dz = 0,$$

où a *désigne une constante :*

1° *Vérifier que la condition d'intégrabilité est satisfaite;*

2° *Intégrer l'équation donnée;*

3° *Déterminer une fonction* $\lambda(x, y, z)$ *telle que, en multipliant par* λ *le premier membre de l'équation donnée, on obtienne comme produit une différentielle exacte.*

(Juin 1907.)