R. ALEZAIS

Sur le calcul d'une fonction analytique dont on connait la partie réelle

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 337-341

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__337_0>

[D3a]

SUR LE CALCUL D'UNE FONCTION ANALYTIQUE DONT ON CONNAIT LA PARTIE REELLE;

PAR M. R. ALEZAIS.

Soit P une fonction réelle de x et de y; on se propose d'en trouver une autre Q telle que $P + iQ$ soit fonction de $z = x + iy$, ou, ce qui revient au même, de trouver la fonction $f(z)$ dont P est la partie réelle. Les méthodes généralement employées nécessitent une intégration que l'on peut facilement éviter en s'appuyant sur la forme générale des intégrales de l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0,$$

dont P et Q doivent être solutions.

Je désigne par t la conjuguée de z, de sorte que

$$x = \frac{z+t}{2}, \qquad y = \frac{z-t}{2i}.$$

THÉORÈME. — *Si l'on a*

$$P(x, y) = \psi(z, t)$$

et si t_0 est une constante telle que $\psi(z, t_0)$ ne soit pas infinie, on a

$$(1) \qquad f(z) = 2\psi(z, t_0) + c,$$

où c est une constante arbitraire.

En effet, la fonction P étant harmonique peut se mettre sous la forme

$$P = \varphi(z) + \varphi_1(t),$$

et, comme de plus elle est réelle, φ_1 ne peut différer de la conjuguée de φ que par une constante réelle. On peut donc écrire

$$P = \varphi(z) + \varphi_1(t) + \text{const.}$$

en supposant φ_1 la conjuguée de φ. Q étant aussi une fonction harmonique réelle, on a de même

$$Q = \psi(z) + \psi_1(t) + \text{const.},$$

où ψ_1 est la conjuguée de ψ. Il en résulte

$$f(z) = \varphi(z) + \varphi_1(t) + i[\psi(z) + \psi_1(t)] + \text{const.}$$

Mais le second membre doit être fonction de z seul; il faut donc que l'on ait

$$\varphi_1(t) + i\psi_1(t) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\psi_1(t) = -\frac{1}{i}\varphi_1(t), \qquad \psi(z) = \frac{1}{i}\varphi(z).$$

On a donc

$$f(z) = 2\varphi(z) + \text{const.}$$

Enfin, de l'identité

$$\psi(z, t) = \varphi(z) + \varphi_1(t) + \text{const.},$$

il résulte que $\psi(z, t_0)$, supposé fini, ne diffère de $\varphi(z)$ que par une constante, et l'on a bien la formule (1).

Il est à remarquer que, P étant entièrement déterminée, la partie imaginaire de c est seule arbitraire; on détermine sa partie réelle en donnant à x et à y un système particulier de valeurs dans P et dans $2\psi(z_0, t_0) + c$. Cela fait, je désignerai par iA, A réel, la constante arbitraire.

Voici quelques exemples donnés aux examens de la licence :

1° $P = \dfrac{2\sin 2x}{e^{2y} + e^{-2y} - 2\cos 2x}$ (Grenoble, nov. 1884).

$$\psi(z, t) = \frac{\sin(z+t)}{\cos(z-t) - \cos(z+t)}, \qquad \psi\left(z, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\cos z}{2\sin z}.$$

P s'annule avec z ; on a

$$f(z) = \cot z + i\text{A}.$$

2° $P = \dfrac{x(1 - x^2 - y^2)}{1 - 2(x^2 - y^2) + (x^2 + y^2)^2}$ (Rennes, nov. 1888).

$$\psi(z, t) = \frac{\dfrac{z+t}{2}\left[1 - \dfrac{(z+t)^2}{4} + \dfrac{(z-t)^2}{4}\right]}{1 - 2\left[\dfrac{(z-t)^2}{4} + \dfrac{(z-t)^2}{4}\right] + \left[\dfrac{(z+t)^2}{4} - \dfrac{(z-t)^2}{4}\right]^2},$$

$$\psi(z, 0) = \frac{z}{2(1 - z^2)}.$$

P s'annule avec z; on a

$$f(z) = \frac{z}{1 - z^4} + i\text{A}.$$

3° $P = \dfrac{\cos 2x + e^{2y}}{2\cos 2x + e^{2y} + e^{-2y}}$ (Montpellier, juillet 1893).

$$\psi(z, t) = \frac{\cos(z+t) + \cos(z-t) - i\sin(z-t)}{2[\cos(z+t) + \cos(z-t)]},$$

$$\psi(z, 0) = \frac{2\cos z - i\sin z}{4\cos z} = \frac{1}{2} - \frac{i}{4}\operatorname{tang} z.$$

P se réduit à $\frac{1}{2}$ pour $z = 0$; on a

$$f(z) = \frac{1}{2}[1 - i(\operatorname{tang} z + \text{A})].$$

4° $P = 1 - \operatorname{ch} 2y \cos 2x$ (Nancy, juillet 1893).

$$\psi(z, t) = 1 - \cos(z-t)\cos(z+t), \qquad \psi(z, 0) = \sin^2 z.$$

P s'annule avec z ; on a

$$f(z) = 2\sin^2 z + i\text{A}.$$

Généralisations. — Soit à déterminer

$$f(z) = P + iQ,$$

sachant que l'on a

$$aP + bQ = \Phi(x, y),$$

a et b étant des constantes réelles.

En raisonnant comme plus haut, on a

$$aP + bQ = (a - bi)\,\varphi(z) + (a + bi)\,\varphi_1(t) + \text{const.}$$

Soit

$$\Phi(x, y) = \psi(z, t),$$

il vient

$$\varphi(z) = \frac{\psi(z, t_0)}{a - bi} + \text{const.}$$

et, par suite,

$$f(z) = \frac{2\psi(z, t_0)}{a - bi} + \text{const.}$$

Exemple :

$$P - Q = \frac{\cos x + \sin x - e^{-y}}{2\cos x - e^{y} - e^{-y}} \qquad \text{(Montpellier, nov. 1906).}$$

$$\psi(z, t) = \frac{\cos\dfrac{z+t}{2} + \sin\dfrac{z+t}{2} - \cos\dfrac{z-t}{2} - i\sin\dfrac{z-t}{2}}{2\left(\cos\dfrac{z+t}{2} - \cos\dfrac{z-t}{2}\right)},$$

$$\psi(z, \pi) = \frac{-2\sin\dfrac{z}{2} + (1 + i)\cos\dfrac{z}{2}}{-4\sin\dfrac{z}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1 - i}{4}\cot\frac{z}{2};$$

on a ici $a - bi = 1 + i$ et, par suite,

$$f(z) = c - \frac{1}{2}\cot\frac{z}{2}.$$

Mais, pour $z = 0$, $P - Q$ se réduit à $\frac{1}{2}$; on a donc en définitive

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \cot\frac{z}{2}\right) + (1 + i)A.$$

D'une manière plus générale, étant donnée une relation

$$F(P, Q, x, y) = 0,$$

on peut l'écrire

$$F\left[\varphi(z) + \varphi_1(t) + \text{const.}, \frac{\varphi(z)}{i} - \frac{\varphi_1(t)}{i} + \text{const.}, \frac{z+t}{2}, \frac{z-t}{2i}\right] = 0.$$

Si l'on peut trouver une valeur constante t_0 de t telle que cette relation prenne la forme

$$a\,\varphi(z) + b\,\varphi_1(t_0) = \Phi(z),$$

on en déduira $\varphi(z)$ à une constante près et, par suite, $f(z)$.

Exemple :

$$3xQ - yP = 8x^3y \qquad \text{(Nancy, novembre 1904).}$$

Cette relation peut s'écrire

$$3(z+t)[\varphi(z) - \varphi_1(t)] - (z-t)[\varphi(z) + \varphi_1(t)] = (z+t)^3(z-t).$$

Pour $t = 0$, on a

$$3z[\varphi(z) - \varphi_1(0)] - z[\varphi(z) + \varphi_1(0)] = z^4,$$

ou

$$2\varphi(z) = z^3 + 4\varphi_1(0),$$
$$f(z) = z^3.$$

On voit facilement en substituant que la constante est nulle.