

E. MATHY

**Décomposition en éléments simples de
la fonction doublement périodique de
seconde espèce ayant un infini d'ordre
 n . Formation des coefficients**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 7
(1907), p. 263-266

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__263_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1907, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[F2d]

**DECOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES DE LA FONCTION
DOUBLEMENT PÉRIODIQUE DE SECONDE ESPÈCE AYANT
UN INFINI D'ORDRE n . FORMATION DES COEFFICIENTS;**

PAR M. E. MATHY.

Pour résoudre la question, il faut établir le lemme suivant :

LEMME. — *Les coefficients du développement de $\frac{\sigma(u-a)}{-\sigma a}$ suivant les puissances de u sont des polynomes entiers en ζ , p et $p^{(n)}$.*

En effet, la fonction $\sigma(u-a)$ est holomorphe et impaire; donc

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma(u-a) = -\sigma a + u\sigma'a - \frac{u^2}{1.2}\sigma''a + \frac{u^3}{1.2.3}\sigma'''a - \dots, \\ \sigma(u-a) = -\sigma a \left(1 - u\frac{\sigma'a}{\sigma b} + \frac{u^2}{1.2}\frac{\sigma''a}{\sigma a} - \frac{u^3}{1.2.3}\frac{\sigma'''a}{\sigma a} + \dots \right). \end{array} \right.$$

Par définition

$$(2) \quad \frac{\sigma' a}{\sigma a} = \zeta a.$$

En dérivant, on trouve

$$(2') \quad \frac{\sigma'' a}{\sigma a} - \left(\frac{\sigma' a}{\sigma a} \right)^2 = -p a;$$

d'où

$$\frac{\sigma'' a}{\sigma a} = \overline{\zeta a^2} - p a.$$

De même

$$\frac{\sigma''' a}{\sigma a} - \frac{\sigma'' a}{\sigma a} \frac{\sigma' a}{\sigma a} = -2 \zeta a p a - p' a.$$

On en déduit

$$(3) \quad \frac{\sigma''' a}{\sigma a} = \overline{\zeta a^3} - 3 \zeta a p a - p' a.$$

Mais on peut écrire

$$\frac{d}{da} : \frac{\sigma'' a}{\sigma a} = \frac{\sigma''' a}{\sigma a} - \frac{\sigma' a}{\sigma a} \zeta a,$$

pour en conclure

$$(4) \quad \frac{\sigma''' a}{\sigma a} = \frac{\sigma'' a}{\sigma a} \zeta a + \frac{d}{da} : \frac{\sigma' a}{\sigma a}.$$

D'une façon générale

$$(5) \quad \frac{\sigma^{(n)} a}{\sigma a} = \frac{\sigma^{(n-1)} a}{\sigma a} \zeta a + \frac{d}{da} : \frac{\sigma^{(n-1)} a}{\sigma a}.$$

Cette égalité jointe à (2) démontre le lemme et donne la loi de formation des coefficients de (1); il suffit de faire (n) successivement égal à 2, 3, 4, ...

Le développement sera

$$(6) \quad \frac{\sigma(u-a)}{-\sigma a} = 1 + \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{u^n}{n!} \left[\frac{\sigma^{(n-1)} a}{\sigma a} \zeta a + \frac{d}{da} : \frac{\sigma^{(n-1)} a}{\sigma a} \right].$$

PROBLÈME. — Soit la fonction $F(u)$ doublement périodique de seconde espèce ayant un infini d'ordre n ; sa forme générale est

$$(7) \quad F(u) = \frac{\sigma(u-a_1)\sigma(u-a_2)\dots\sigma(u-a_n)}{(-1)^n \sigma a_1 \sigma a_2 \dots \sigma a_n (\sigma u)^n} e^{\rho u}.$$

La formule de décomposition est

$$(8) \quad F(u) = \varphi^{(n-1)}u + A_1 \varphi^{(n-2)}u + A_2 \varphi^{(n-3)}u + \dots + A_{n-1} \varphi(u),$$

l'élément simple

$$\varphi(u) = \frac{\sigma(u-a_1-a_2-\dots-a_n)}{-\sigma(a_1+a_2+\dots+a_n)\sigma u} e^{\rho u}.$$

Les développements de $e^{\rho u}$ et de $(\sigma u)^{-n}$ sont connus; comme l'expression (6) fournit les développements des n fonctions $\sigma(u-a_n)$, on peut calculer d'une façon explicite les coefficients $A_{(n-1)}, \dots, A_2, A_1$, de la formule (8); on sait qu'ils sont respectivement les coefficients des puissances négatives de u de n à 1 dans le produit des $(n+2)$ fonctions qui forment $F(u)$.

Application ($n=3$).

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} F(u) &= \frac{\sigma(u-a_1)\sigma(u-a_2)\sigma(u-a_3)}{-\sigma a_1 \sigma a_2 \sigma a_3 (\sigma u)^3} e^{\rho u} \\ &= \varphi''u + A_1 \varphi'u + A_2 \varphi u, \\ \varphi u &= \frac{\sigma(u-a_1-a_2-a_3)}{-\sigma(a_1+a_2+a_3)\sigma u} e^{\rho u}. \end{aligned} \right.$$

En formant les développements on trouve

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} F(u) &= \varphi''u + \left(\rho - \sum_1^3 \zeta a_n \right) \varphi'u \\ &+ \frac{1}{1.2} \left[\left(\rho - \sum_1^3 \zeta a_n \right)^2 - \sum_1^3 \rho a_n \right] \varphi u. \end{aligned} \right.$$

Si

$$\rho = \sum_1^3 \zeta a_n,$$

on retrouve une forme classique

$$(11) \left\{ \begin{aligned} F(u) &= \frac{\sigma(u-a_1)\sigma(u-a_2)\sigma(u-a_3)}{-\sigma a_1 \sigma a_2 \sigma a_3 (\sigma u)^3} e^{(\zeta a_1 + \zeta a_2 + \zeta a_3)u} \\ &= \varphi^r u - \frac{1}{1.2} (p a_1 + p a_2 + p a_3) \varphi u, \\ \varphi u &= \frac{\sigma(u-a_1-a_2-a_3)}{-\sigma(a_1+a_2+a_3)\sigma u} e^{(\zeta a_1 + \zeta a_2 + \zeta a_3)u}. \end{aligned} \right.$$