LUCIEN GODEAUX

Sur une surface remarquable du quatrième ordre

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 255-257

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__255_1>

[M^{2}4e]

SUR UNE SURFACE REMARQUABLE DU QUATRIÈME ORDRE;

PAR M. LUCIEN GODEAUX.

1. Soient A, B deux points fixes dont les coordonnées sont respectivement (a_1, a_2, a_3, a_4) et (b_1, b_2, b_3, b_4), une quadrique dont l'équation est

$$\gamma_x^2 = 0$$

et enfin une droite d'intersection de deux plans

$$\alpha_x = 0, \qquad \beta_x = 0.$$

Je prends un point X de l'espace. Les droites AX, BX rencontrent les plans α, β respectivement aux points A_1, B_1. Je vais rechercher le lieu de X lorsque la droite A_1B_1 est tangente à la quadrique γ.

Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les coordonnées du point X; les coordonnées des points A_1, B_1 sont respectivement

$$\alpha_x a_i - \alpha_a x_i, \qquad \beta_x b_i - \beta_b x_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Soit $k(\alpha_x a_i - \alpha_a x_i) + k'(\beta_x b_i - \beta_b x_i)$ les coordonnées du point de rencontre de la droite A_1B_1 avec la quadrique; on a l'équation de condition

$$k^2(\alpha_x^2\gamma_a^2 - \gamma_x^2\alpha_a^2) + 2kk'(\gamma_a\alpha_x - \gamma_x\alpha_a)(\gamma_b\beta_x - \gamma_x\beta_b) \\ + k'^2(\gamma_b^2\beta_x^2 - \gamma_x^2\beta_b^2) = 0.$$

Pour que A_1B_1 soit tangente à γ, il faut que les deux racines de cette équation soient égales, c'est-à-dire que l'on ait

$$(\gamma_a\alpha_x - \gamma_x\alpha_a)^2(\gamma_b\beta_x - \gamma_x\beta_b)^2 \\ - (\gamma_b^2\beta_x^2 - \gamma_x^2\beta_b^2)(\alpha_x^2\gamma_a^2 - \gamma_x^2\alpha_a^2) = 0.$$

Le lieu de X est donc une surface du quatrième ordre S_4.

2. Soit π un plan passant par la droite AB. Le lieu des points X contenus dans ce plan est, comme on sait, une quartique ayant un point double en A, un point double en B et un point double sur la droite d (Deruyts, *Mathesis*, 1re série, t. VII, 1887).

Les points A et B sont donc des points doubles et la droite d une droite double de la surface S_4.

Il existe deux plans passant par la droite AB et qui sont tangents à la quadrique γ; ces plans rencontrent la surface chacun suivant une conique double.

3. Les plans passant par la droite d rencontrent encore la surface S_4 suivant une conique.

Le plan (A, d) et le plan (B, d) rencontrent la surface chacun suivant une conique dégénérée en deux droites et dont le centre est en A ou en B.

Les plans passant par l'une de ces quatre droites rencontrent la surface S_4 suivant une cubique plane; parmi ces cubiques, il y en a quatre qui ont un point double soit en A, soit en B.

4. On peut énoncer la génération de S_4 ainsi : *Le lieu du sommet d'un triangle dont les côtés adjacents passent par des points fixes, dont le côté opposé est tangent à une quadrique et a ses extrémités dans des plans fixes, est une surface du quatrième ordre.*