M. D'OCAGNE

Sur la rectification approchée des arcs de cercle

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__1_0>

NOUVELLES ANNALES

DE

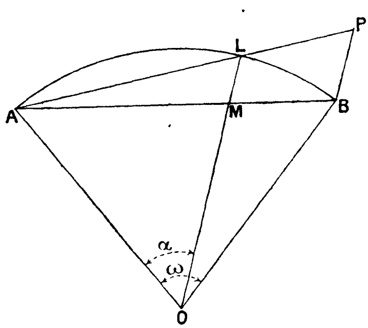
MATHÉMATIQUES.

[K21d]

SUR LA RECTIFICATION APPROCHÉE DES ARCS DE CERCLE;

PAR M. D'OCAGNE.

Soit, dans un cercle de rayon 1, ALB un arc égal à ω. Sur la corde AB de cet arc prenons le point M tel que $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = m$ et tirons le rayon OML. Nous allons com-



parer la longueur AL de la corde ainsi déterminée dans le cercle à la longueur ω de l'arc AB. Appelant α l'angle AOM, et posant $\sin\frac{\alpha}{2} = \theta$, on a

$$\mathrm{AL} = 2\theta.$$

Or, le triangle isoscèle OAB donne

$$\frac{\sin\alpha}{AM} = \frac{\sin(\omega-\alpha)}{MB},$$

ou

$$\frac{\sin\alpha}{m} = \frac{\sin(\omega-\alpha)}{1-m},$$

c'est-à-dire, en posant $\frac{1-m}{m} = p$,

$$\sin(\omega-\alpha) = p\sin\alpha.$$

Faisant usage du développement bien connu

$$x = \sin x + \frac{\sin^3 x}{6} + \frac{3\sin^5 x}{40} + \dots$$
$$+ \frac{1.3\dots(2n-1)}{2.4\dots 2n}\,\frac{\sin^{2n+1} x}{2n+1} + \dots,$$

on tire de là

$$\omega-\alpha = p\sin\alpha + \frac{p^3\sin^3\alpha}{6} + \frac{3p^5\sin^5\alpha}{40} + \dots.$$

Or,

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\theta(1-\theta^2)^{\frac{1}{2}}$$

On peut donc écrire

$$\omega-\alpha = 2p\theta(1-\theta^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{8p^3}{6}\theta^3(1-\theta^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{96p^5}{40}\theta^5(1-\theta^2)^{\frac{5}{2}} + \dots$$
$$= 2p\theta\left(1-\frac{\theta^2}{2}-\frac{\theta^4}{8}-\dots\right) + \frac{4p^3}{3}\theta^3\left(1-\frac{3}{2}\theta^2+\dots\right)$$
$$+ \frac{12p^5}{5}\theta^5(1-\dots)+\dots$$
$$= 2p\theta + \left(\frac{4p^3}{3}-p\right)\theta^3 + \left(\frac{12p^5}{5}-2p^3-\frac{p}{4}\right)\theta^5 + \dots.$$

D'autre part, si l'on écrit $\alpha = 2\frac{\alpha}{2}$ et qu'on applique à $\frac{\alpha}{2}$ le développement ci-dessus rappelé, on a

$$\alpha = 2\theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{3\theta^5}{20} + \dots.$$

Par addition des deux derniers développements obtenus, il vient

$$\omega = 2(p+1)\theta + \frac{1}{3}(4p^3 - 3p + 1)\theta^3 + \frac{1}{20}(48p^5 - 40p^3 - 5p + 3)\theta^5 + \ldots$$

ou, en remplaçant p par $\frac{1-m}{m}$, et multipliant les deux membres par m,

$$m\omega = 2\theta + \frac{9m^2 - 12m + 4}{3m^2}\theta^3 + \frac{115m^4 - 360m^3 + 440m^2 - 240m + 48}{20m^4}\theta^5 + \ldots,$$

d'où, en se rappelant que $AL = 2\theta$ et posant

$$\delta = 2\theta - m\omega,$$

$$\delta = -\frac{9m^2 - 12m + 4}{3m^2}\theta^3 - \frac{115m^4 - 360m^3 + 440m^2 - 240m + 48}{20m^4}\theta^5 + \ldots.$$

Ainsi, par rapport à θ qui tend vers o en même temps que ω (et même plus rapidement, de façon sensible), la différence δ est généralement du troisième ordre. Mais il suffit de remarquer que

$$9m^2 - 12m + 4 = (3m-2)^2,$$

pour en conclure que, si l'on prend

$$m = \frac{2}{3},$$

la différence δ n'est plus que du cinquième ordre en θ.

Si, d'ailleurs, on effectue la division par $3m - 2$ du polynome qui figure en numérateur dans le coefficient de θ^5, on trouve pour reste $-\frac{32}{81}$. La substitution de la valeur $\frac{2}{3}$ à m, dans le coefficient de θ^5, a donc pour résultat

$$-\frac{-\frac{32}{81}}{20\frac{16}{81}}=\frac{1}{10}$$

et, par suite, pour $m=\frac{2}{3}$,

$$\delta=\frac{\theta^5}{10}+\ldots.$$

Ceci montre que *si l'on mène le rayon* OL *passant aux* $\frac{2}{3}$ *de la corde* AB *à partir du point* A, *la corde* AL *ainsi déterminée dans le cercle est approximativement égale aux* $\frac{2}{3}$ *de l'arc* AB.

Il suffit, par conséquent, de *tirer la parallèle* BP *à* OL *pour avoir approximativement en* AP *la longueur de l'arc* AB.

Remarquons d'ailleurs qu'il est facile de tracer la droite ML, même si le centre O du cercle est inaccessible. Cette droite est, en effet, perpendiculaire au milieu de la corde commune au cercle donné et à tout cercle ayant le point M comme centre, celui par exemple qui a MB pour rayon.

Inversement, cette construction permet de porter sur le cercle, à partir de A, un arc de longueur l donnée. Il suffit, ayant tracé la corde AL de longueur $\frac{2l}{3}$ et l'ayant prolongée en P tel que $AP=l$, de mener PB parallèlement au rayon aboutissant en L.

En particulier, on pourra reporter sur l'arc AB la longueur de la corde AL, égale à ses deux tiers, ce qui, au degré d'approximation que comporte cette construction, fournit un moyen d'opérer la trisection de l'angle.

Pour nous rendre compte du degré d'approximation que comporte ce tracé, nous avons calculé l'erreur relative

$$\varepsilon = \frac{\text{AP} - \text{arc AB}}{\text{arc AB}}$$

pour les diverses valeurs de l'arc AB croissant de 10° en 10° [1] dans un quart de circonférence. Ce calcul est facile à faire. On a, en effet,

$$\text{AP} = \frac{3}{2}\,\text{AL} = 3 \sin\frac{\alpha}{2},$$

l'angle α étant lié à ω par

$$\sin(\omega - \alpha) = \frac{1}{2} \sin\alpha$$

ou

$$\tang\alpha = \frac{\sin\omega}{\cos\omega + \frac{1}{2}} = \frac{\sin\omega}{2\cos\frac{\omega + 60}{2}\cos\frac{\omega - 60}{2}}.$$

Nous avons ainsi obtenu les valeurs suivantes :

ω.	ε.
10°	0,000 01
20	0,000 01
30	0,000 05
40	0,000 11
50	0,000 38
60	0,000 82
70	0,001 30
80	0,002 51
90	0,005 34

Ainsi, jusqu'aux environs de $\omega = 70°$, l'erreur relative reste inférieure à 0,001, c'est-à-dire au-dessous de ce que, dans la pratique du calcul graphique, on peut tenir pour négligeable.

Il est facile d'ailleurs, par des bissections successives,

[1] La présence du terme $\frac{1}{2}$, égal à $\cos 60°$, au dénominateur de $\tang\alpha$, rend le calcul plus simple avec les degrés qu'avec les grades.

de rendre toujours la valeur angulaire de l'arc à rectifier inférieure à celle que comporte le degré d'approximation relative qu'on veut obtenir.