

L. VESSOT KING

**Expression de $\zeta_{\frac{1}{2}}^u$ comme quotient de
deux séries entières**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 6
(1906), p. 67-69

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6_67_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1906, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[F4b]

EXPRESSION DE $p \frac{u}{2}$ COMME QUOTIENT
DE DEUX SÉRIES ENTIÈRES;

PAR M. L. VESSOT KING.

On a, d'après une formule symétrique établie dans
les *Nouvelles Annales* (mai 1904) par M. Humbert,

$$p \frac{u}{2} = \frac{e_1(e_2 - e_3)\sigma_1 u + e_2(e_3 - e_1)\sigma_2 u + e_3(e_1 - e_2)\sigma_3 u}{(e_2 - e_3)\sigma_1 u + (e_3 - e_1)\sigma_2 u + (e_1 - e_2)\sigma_3 u},$$

ce qui peut s'écrire

$$(1) \quad p \frac{u}{2} = \frac{\sum e_{\alpha}(e_{\beta} - e_{\gamma}) \sigma_{\alpha} u}{\sum (e_{\beta} - e_{\gamma}) \sigma_{\alpha} u},$$

il en résulte immédiatement une expression de $p \frac{u}{2}$ sous la forme du quotient de deux séries.

Le développement des fonctions $\sigma_{\alpha} u$ ($\alpha = 1, 2, 3$) en série se fait d'après la formule

$$(2) \quad \sigma_{\alpha} u = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (A_{\nu} + B_{\nu} \cdot e_{\alpha} + C_{\nu} \cdot e_{\alpha}^2) \frac{u^{2\nu}}{2^{\nu} \nu!}.$$

Les coefficients A_{ν} , B_{ν} , C_{ν} sont connus et s'obtiennent pour les diverses valeurs de ν au moyen de formules récurrentes.

Remplaçons dans la formule (1) $\sigma_{\alpha} u$ par son développement en série et remarquons d'abord que l'on a

$$\begin{aligned} \sum e_{\alpha} &= 0, & \sum (e_{\beta} - e_{\gamma}) &= 0, \\ \sum e_{\alpha}(e_{\beta} - e_{\gamma}) &= 0, & \sum e_{\alpha}^2(e_{\beta} - e_{\gamma}) &= 0 \\ & & (\alpha = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Il en résulte, sans difficulté,

$$(3) \quad p \frac{u}{2} = \frac{\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} B_{\nu} \frac{u^{2\nu}}{2^{\nu} \nu!}}{\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} C_{\nu} \frac{u^{2\nu}}{2^{\nu} \nu!}}$$

ou bien, après avoir substitué les valeurs de B_{ν} et

(69)

de C_ν et après avoir simplifié le résultat,

$$p \frac{u}{2} = \frac{4}{u^2} \frac{1 + \frac{g_2}{2^5 \cdot 3 \cdot 5} u^4 + \frac{13g_3}{2^8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} u^6 + \dots}{1 - \frac{g_2}{2^6 \cdot 3 \cdot 5} u^4 - \frac{g_3}{2^7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} u^6 + \dots}.$$

Nous retrouvons la série ordinaire de $p \frac{u}{2}$ en développant l'expression de droite suivant les puissances de u .