Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 567-575
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__567_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1967.

(1903, p. 144.)

Soient AIB *une corde d'un cercle,* AJB *un des arcs soustendus,* I *et* J *étant les points milieux;* M *étant un point quelconque de la corde* AB, *élevons par ce point une perpendiculaire sur cette corde; elle va rencontrer une des cordes* AJ *ou* JB *en un point* M_1, AJ *si* $\frac{AM}{AB} < \frac{1}{2}$, *et* JB *si* $\frac{AM}{AB} > \frac{1}{2}$. *Procédant sur la corde qui comprend* M_1

comme tantôt sur AB *et* M, *on obtient un point* M_2. *On obtient ainsi une suite de points* M_1, M_2, ..., M_n *qui ont pour limite un point de l'arc* AJB, *le partageant dans le rapport* $\frac{AM}{AB}$. *On demande les coordonnées du point* M_n.

A. PELLET.

SOLUTION

Par M. LETIERCE.

Supposons $\frac{AM}{AB} < \frac{1}{2}$; O étant le centre du cercle, prenons pour axe des x le diamètre OA, pour axe des y le diamètre perpendiculaire, et soit $\alpha =$ arc AJB. Nous définirons un point quelconque C de la circonférence par l'angle de OC avec Ox.

Le rapport $\gamma = \frac{AM}{AB}$ peut se mettre sous la forme

$$\lambda = \frac{1}{2^{n_1}} - \frac{1}{2^{n_1+n_2}} + \ldots + (-1)^{k-1} \frac{1}{2^{n_1+n_2+\ldots+n_k}} + \ldots,$$

où n_1, n_2, ..., n_k, ... sont des entiers égaux ou supérieurs à 1, et, pour la commodité de l'écriture, posons

$$\lambda_k = \frac{1}{2^{s_1}} - \frac{1}{2^{s_2}} + \ldots + (-1)^{k-1} \frac{1}{2^{s_k}}$$

avec

$$s_k = n_1 + n_2 + \ldots + n_k.$$

Les s_1 premiers points M_1, M_2, ..., M_{s_1} sont sur les droites

$$AJ, \quad AJ_1, \quad \ldots, \quad AJ_{s_1-1},$$

issues de A; les rapports

$$\frac{AM_1}{AJ}, \quad \frac{AM_2}{AJ_1}, \quad \ldots, \quad \frac{AM_{s_1}}{AJ_{s_1-1}}$$

sont égaux respectivement à

$$2\lambda, \quad 2^2\lambda, \quad \ldots, \quad 2^{s_1}\lambda,$$

tous inférieurs à $\frac{1}{2}$, sauf le dernier, et les points J, J_1, ...,

J_{s_1-1} sont définis par les angles

$$\frac{\alpha}{2}, \quad \frac{\alpha}{2^2}, \quad \ldots, \quad \frac{\alpha}{2^{s_1}}.$$

Les n_2 points suivants M_{s_1+1}, M_{s_1+2}, ..., M_{s_2} sont sur les droites $J_{s_1-1}J_{s_1}$, $J_{s_1-1}J_{s_1+1}$, ..., $J_{s_1-1}J_{s_2-1}$ issues de J_{s_1-1}; les rapports analogues à $\frac{AM}{AB}$ sont

$$2^{s_1+1}(\lambda_1 - \lambda), \quad 2^{s_1+2}(\lambda_1 - \lambda), \quad \ldots, \quad 2^{s_2}(\lambda_1 - \lambda),$$

et les points J_{s_1}, J_{s_1+1}, ..., J_{s_2-1} sont définis par les angles

$$\alpha\lambda_1\left(1 - \frac{1}{2}\right), \quad \alpha\lambda_1\left(1 - \frac{1}{2^2}\right), \quad \ldots, \quad \alpha\lambda_2.$$

D'une façon générale, si $n = s_k + m$, avec $0 < m \leqq n_{k+1}$, on voit aisément que le point M_n est sur la corde $(J_{s_k-1}J_{s_k+m-1})$ dont les extrémités sont définies par les angles $\alpha\lambda_k$ et $\alpha\left(\lambda_k + \frac{(-1)^k}{2^n}\right)$, et que l'on a

$$\frac{J_{s_k-1}M_n}{J_{s_k-1}J_{s_k+m-1}} = (-1)^k 2^n(\lambda - \lambda_k).$$

Cela étant, en prenant pour unité le rayon du cercle, les coordonnées du point M_n sont :

$$x = \cos\alpha\lambda_k + (-1)^k 2^n(\lambda - \lambda_k)\left\{\cos\alpha\left[\lambda_k + \frac{(-1)^k}{2^n}\right] - \cos\alpha\lambda_k\right\},$$

$$y = \sin\alpha\lambda_k + (-1)^k 2^n(\lambda - \lambda_k)\left\{\sin\alpha\left[\lambda_k + \frac{(-1)^k}{2^n}\right] - \sin\alpha\lambda_k\right\},$$

qui peuvent s'écrire

$$x = \cos\alpha\lambda_k + (-1)^{k+1} 2^{n+1}(\lambda - \lambda_k)\sin\alpha\left[\lambda_k + \frac{(-1)^k}{2^{n+1}}\right]\sin\frac{(-1)^k\alpha}{2^{n+1}},$$

$$y = \sin\alpha\lambda_k + (-1)^k \quad 2^{n+1}(\lambda - \lambda_k)\cos\alpha\left[\lambda_k + \frac{(-1)^k}{2^{n+1}}\right]\sin\frac{(-1)^k\alpha}{2^{n+1}}.$$

Lorsque n croît indéfiniment, le produit $2^{n+1}(\lambda - \lambda_k)$ reste toujours en valeur absolue inférieur à 2, $\sin\frac{(-1)^k\alpha}{2^{n+1}}$ tend vers o, et la limite de M_n est le point de coordonnées

$$\cos\alpha\lambda, \quad \sin\alpha\lambda,$$

qui satisfait bien aux conditions de l'énoncé.

Si $\frac{AM}{AB} > \frac{1}{2}$, on considérera le rapport $\frac{BM}{BA} < \frac{1}{2}$ et l'on prendra OB pour axe des x.

2006.

(1905, p. 48.)

Soit m un nombre impair positif quelconque. Formons la suite

$$[\sqrt{m}],\ [\sqrt{2m}],\ \ldots,\ [\sqrt{(m-1)m}],$$

en désignant, suivant l'usage, par $[x]$ le nombre entier défini par

$$x - 1 < [x] \leqq x.$$

1° *Dans la suite ainsi obtenue il ne peut y avoir plus de deux termes égaux;*

2° *La même suite, au contraire, contient des couples de termes égaux, et le nombre de ces couples est* $\left[\frac{m}{4}\right]$.

Exemple. — *Pour $m = 9$, la suite est la suivante :*

$$3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 6,\ 7,\ 7,\ 8,$$

et elle contient $2 = \left[\frac{9}{4}\right]$ couples de termes égaux.

(R. Bricard.)

SOLUTION

Par M. Parrod.

1° S'il y avait trois termes égaux, ils seraient consécutifs; on aurait

$$a^2 \leqq hm < (a+1)^2,$$
$$a^2 \leqq (h+2)m < (a+1)^2,$$

donc

$$2m < 2a + 1,$$

or

$$a < m - 1;$$

c'est donc impossible.

2° Cette suite renferme des termes égaux, car le nombre des termes est supérieur à la différence des extrêmes plus 1

$$m - [\sqrt{m}].$$

Il y a donc au moins $[\sqrt{m}] - 1$ couples de termes égaux. A deux termes égaux correspondent les inégalités

$$a^2 \leqq hm < (a+1)^2,$$
$$a^2 \leqq (h+1)m < (a+1)^2,$$

donc

$$m < 2a + 1, \qquad a > \frac{m-1}{2}.$$

Or

$$\frac{m-1}{2} = \left[\sqrt{\frac{m-1}{4} \times m}\right];$$

par suite pour ces termes

$$h \geqq \left[\frac{m}{4}\right].$$

La différence de deux termes consécutifs peut être supérieure à 1; on aurait alors, par exemple,

$$a^2 \leqq (hm < (a+1)^2,$$
$$(a+2)^2 \leqq (h+1)\,m < (a+3)^2,$$

donc

$$m \geqq 2a + 3, \qquad a \leqq \frac{m-3}{2}$$

et

$$h < \left[\frac{m}{4}\right].$$

On a ainsi partagé la suite en deux; la différence des extrêmes de la première est $\frac{m-1}{2} - [\sqrt{m}] + 1$, le nombre des termes est $\left[\frac{m}{4}\right]$, la différence est le nombre dont il faut augmenter $[\sqrt{m}] - 1$ pour avoir le nombre exact des couples égaux ; on a ainsi

$$\frac{m-1}{2} - \frac{m}{4}$$

ou

$$\left[\frac{m}{2}\right] - \left[\frac{m}{4}\right] = \left[\frac{m}{4}\right].$$

Remarque. — Le théorème est encore exact quand m es pair. Quand m est un multiple de 4, pour $h = \frac{m}{4}$ on a

$$\sqrt{\frac{m}{4} \times m} = \frac{m}{2}$$

et

$$\left[\sqrt{\frac{m+4}{4} \times m}\right] = \frac{m}{2};$$

ces deux termes sont égaux, mais aucun de ceux qui les précèdent ne sont égaux.

2035.

(1906, p. 96.)

Soient ABC, A′B′C′ *deux triangles. Si les droites* AA′, BB′, CC′ *rencontrent respectivement les côtés* a, b, c *du premier triangle en trois points situés sur une même droite, les points* (a, a'), (b, b'), (c, c') *se joignent aux sommets* A′, B′, C′ *du second triangle par trois droites concourantes.*

(R. B.)

SOLUTION

Par M. G. Fontené.

Le triangle ABC étant pris comme triangle de référence, soient

$$ax + a'y + a''z = 0, \qquad bx + b'y + b''z = 0,$$
$$cx + c'y + c''z = 0$$

les équations des côtés du triangle A′B′C′. Si l'on désigne par A, A′, A″, B, B′, ..., les mineurs du déterminant

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix},$$

affectés des signes qui concernent le développement de ce déterminant, on a pour les coordonnées du point A′, par exemple,

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{A'} = \frac{z}{A''},$$

de sorte que la droite AA′ rencontre le côté BC ou a en un point dont les coordonnées sont O, A′, A″; l'hypothèse de l'énoncé se traduit donc par la condition

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} O & A' & A'' \\ B & O & B'' \\ C & C' & O \end{vmatrix} = 0.$$

Une droite passant en A′ a une équation de la forme

$$\beta(bx + b'y + b''z) + \gamma(cx + c'y + c''z) = 0;$$

elle passe au point (a, a'), si l'équation

$$\begin{aligned} &\alpha(ax + a'y + a''z) \\ &\quad + \beta(bx + b'y + b''z) + \gamma(cx + c'y + c''z) = 0 \end{aligned}$$

peut se réduire à $x = 0$, c'est-à-dire si l'on peut avoir

$$\begin{aligned} a'\alpha + b'\beta + c'\gamma &= 0, \\ a''\alpha + b''\beta + c''\gamma &= 0; \end{aligned}$$

il faut donc prendre

$$\frac{\beta}{B} = \frac{\gamma}{C},$$

et l'équation de la droite considérée est

$$B(bx + b'y + b''z) + C(cx + c'y + c''z) = 0$$

en écrivant que cette droite et les deux droites analogues sont concourantes, on retombe, comme l'on voit, sur la condition (1).

On démontrerait d'une manière toute semblable le théorème suivant : *Soient* ABCD, A′B′C′D′ *deux tétraèdres. Si les droites* AA′, BB′, CC′, DD′ *rencontrent respectivement les plans a, b, c, d des faces du premier tétraèdre en quatre* *points situés dans un même plan, les droites* (a, a'), (b, b'), ... *déterminent avec les sommets* A′, B′, C′, D′ *du second tétraèdre quatre plans qui ont un point commun.*

Autres solutions de MM. Painvin, Parrod, Retali, Sicard et Sondat.

NOTE.

Voici une démonstration par la méthode de Grassmann de l'extension à l'espace indiquée par M. Fontené. Une démonstration toute semblable s'appliquerait à la question 2035.

Le point de rencontre de la droite AA′ et du plan a ou BCD est donné par le produit régressif

$$\mathrm{AA'.BCD = AA'CD.B + AA'DB.C + AA'BC.D.}$$

En écrivant que ce point et les trois points analogues sont dans un même plan, on obtient la condition

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} 0 & \mathrm{AA'CD} & \mathrm{AA'DB} & \mathrm{AA'BC} \\ \mathrm{BB'CD} & 0 & \mathrm{BB'DA} & \mathrm{BB'AC} \\ \mathrm{CC'BD} & \mathrm{CC'DA} & 0 & \mathrm{CC'AB} \\ \mathrm{DD'BC} & \mathrm{DD'CA} & \mathrm{DD'AB} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

D'autre part la droite (a, a') est donnée par le produit régressif

$$\mathrm{B'C'D'.BCD = B'BCD.C'D' + C'BCD.D'B' + D'BCD.B'C'},$$

et le plan passant par cette droite et par le point A′ a pour expression

$$\begin{aligned} &\mathrm{B'BCD.C'D'A' + C'BCD.D'B'A' + D'BCD.B'C'A'} \\ &= \mathrm{B'BCD}.b' + \mathrm{C'BCD}.c' + \mathrm{D'BCD}.d'. \end{aligned}$$

En écrivant que ce plan et les trois plans analogues passent par un même point, on a

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} 0 & \mathrm{B'BCD} & \mathrm{C'BCD} & \mathrm{D'BCD} \\ \mathrm{A'CDA} & 0 & \mathrm{C'CDA} & \mathrm{D'CDA} \\ \mathrm{A'DAB} & \mathrm{B'DAB} & 0 & \mathrm{D'DAB} \\ \mathrm{A'ABC} & \mathrm{B'ABC} & \mathrm{C'ABC} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on écrit la relation (1)

$$\begin{vmatrix} 0 & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & 0 & \gamma' & \delta' \\ \alpha'' & \beta'' & 0 & \delta'' \\ \alpha''' & \beta''' & \gamma''' & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

la relation (2) s'écrit

$$\begin{vmatrix} 0 & -\alpha' & \alpha'' & -\alpha''' \\ -\beta & 0 & -\beta'' & \beta'' \\ \gamma & -\gamma' & 0 & -\gamma''' \\ -\delta & \delta' & -\delta'' & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui revient manifestement au même. R. B.