Certificats de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 556-561

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__556_1>

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Caen.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Trajectoires orthogonales des strophoïdes*

$$x(x^2+y^2)-a(x^2-y^2)=0,$$

a étant arbitraire. Construire une de ces trajectoires [*l'équation d'une trajectoire est* $r^2 = C^3 \sin\theta(1+2\cos^2\theta)$].

II. *Étant donnés deux axes rectangulaires* OX, OY, *on considère un point* A, *de masse* 1, *assujetti à glisser sur* OX, *et un point* B, *de masse* 8, *libre de se mouvoir dans le plan* OXY. *Les deux points s'attirent avec une force égale à* 8AB : *à l'instant initial ils sont au repos,* A *à l'origine,* B *en un point* $x_0 = y_0 = 9$. *Mouvement du système : construire la trajectoire en* B.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Étant donnés trois axes rectangulaires* OX, OY, OZ, *sur la parabole*

$$z=0, \qquad x^2-2y=0,$$

on prend un point quelconque M, *par lequel on mène* MP *parallèle à* OZ *et égale au double de l'aire comprise entre l'arc* OM *et sa corde : rectifier la courbe lieu des points* P. *Calculer l'aire cylindrique* ω *engendrée par les droites* MP *et comprise entre les arcs* OM, OP *et la droite* MP. *En prenant le mètre pour unité de longueur et supposant l'abscisse des points* M, P *égale à* 2, *calculer* ω *à moins de* 1^{cm^2}.

$$ds = \left(1 + \frac{1}{2}x^2\right)dx,$$

$$\omega = \frac{1}{45} + \frac{3x^2 - 2}{90}(1 + x^2)^{\frac{2}{3}},$$

$$\omega_1 = 1^{\text{m}^2},2645.$$

(Novembre 1906.)

Grenoble.

Composition. — 1° *Intégrer le système d'équations différentielles*

$$\frac{dx}{dt} = x - y - t - 2,$$

$$\frac{dy}{dt} = y + t.$$

2° *Déterminer une solution particulière telle que, pour* $t = 0$, *on ait* $x = 0$, $y = 0$. *Construire pour cette solution particulière la courbe que décrit le point de coordonnées* x, y *quand* t *varie.*

3° *Déterminer :* 1° *l'aire comprise entre cette courbe, l'axe des* x *et la droite* $x = 1$; 2° *l'aire comprise entre la courbe et la droite* $x = 1$.

4° *Montrer que, par le point* $x = 1$, $y = -1$, *on ne peut mener qu'une tangente à la courbe.*

Épreuve pratique. — I. *Calculer les coordonnées du centre de gravité de l'aire limitée par la courbe*

$$y = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

l'axe des x *et la droite* $x = t$, *lorsque* t *est compris entre* 0 *et* 1.

Cas particuliers où $t = \frac{1}{2}$, $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$. *Que deviennent les formules lorsque t tend vers* 1?

II. *Montrer que l'équation*

$$\int_0^x \frac{x^2\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}$$

n'a qu'une racine. La calculer par approximations.

(Novembre 1906.)

Lille.

ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1. *a et b désignant deux longueurs données* ($a > b$), *et* Ox, Oy, Oz *étant trois axes rectangulaires, les équations*

$$z = 0, \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

représentent une ellipse située dans le plan xOy : *trouver et construire la courbe* (Γ) *lieu des pieds des perpendiculaires abaissées de l'origine sur les tangentes à l'ellipse, former l'équation de* (Γ) *en coordonnées polaires.*

2. *Calculer l'aire de la portion de plan située à l'intérieur de* (Γ).

3. *La courbe* (Γ) *est la directrice d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à* Oz, *construire la projection sur le plan* xOz *de l'intersection de ce cylindre avec une sphère de centre* O *et de rayon* a.

4. *Calculer le volume de la portion de l'espace limitée par ce cylindre et la sphère qui viennent d'être définis.*

5. *a et b variant de telle sorte que la différence* $a^2 - b^2$ *conserve une valeur constante donnée,* (Γ) *engendre une famille de courbes; former et intégrer l'équation différentielle des trajectoires orthogonales de ces courbes.*

MÉCANIQUE.

I. *Pendule simple dans le vide.*

II. *Un voyageur, qui se trouve dans un wagon en marche, abandonne librement à lui-même, sans vitesse relative, un point matériel pesant en un point situé sur la verticale médiane du wagon, à* 2^{m} *au-dessus du plancher. On demande d'étudier le mouvement relatif de ce point pesant, par rapport au wagon, dans les deux cas suivants :*

1° *Le wagon a un mouvement uniformément accéléré; son accélération est de* $0^{m},50$ *par seconde, et sa vitesse est de* 40^{km} *à l'heure, à l'instant même où on lâche le point pesant.*

2° *Le wagon se meut avec une vitesse constante de* 30^{km} *à l'heure sur un cercle de* 80^{m} *de rayon.*

(Novembre 1906.)

Montpellier.

Epreuve écrite. — *Quantités imaginaires. Représentation trigonométrique et exponentielle. Formule de Moivre.*

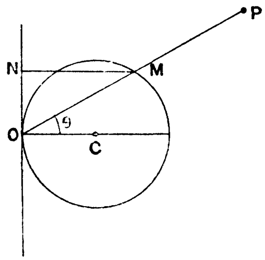
Mettre $\log \text{nép}\,(x+yi)$ *sous la forme* $X+iY$, *et vérifier que* X *et* Y *sont des fonctions de* x *et* y *vérifiant l'équation de Laplace*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0.$$

Partant ensuite du développement de $\log(1+z)$ *en série de Taylor, on y remplacera* z *par* $r(\cos\theta+i\sin\theta)$, *et l'on séparera dans les deux membres la partie réelle de la partie purement imaginaire, ce qui donnera deux développements remarquables. Ces développements sont-ils valables pour toutes les valeurs de* r *et de* θ.

On fixera ensuite son attention sur celui de ces développements qui ne contient que des sinus, et l'on montrera que pour $r=1$ *il représente* $\frac{\theta}{2}$, *et l'on se proposera de retrouver directement ce développement en développant* $\frac{\theta}{2}$ *en série trigonométrique.*

Épreuve pratique. — *On considère un cercle* C *et une tangente* ON *fixes. Par* O *on mène un rayon vecteur* OM *et l'on projette* M *en* N *sur la tangente fixe. On prolonge*



OM *de* MP = MN. *Lieu de* P.

Lorsque θ *varie de* $0°$ *à* $90°$, *la courbe* (P) *enferme au-dessus de l'axe* OC *une aire que l'on demande d'évaluer.*

(Novembre 1906.)

Toulouse.

Épreuve écrite. — I. *L'équation d'une droite, rapportée à deux axes rectangulaires* Ox, Oy, *est*

$$y = tx + t^3,$$

où t désigne un paramètre variable.

Construire l'enveloppe K *de cette droite.*

Calculer la longueur d'un arc OM *de la courbe* k, *le rayon de courbure au point* M.

A *désignant le point de la courbe où le coefficient angulaire de la tangente est égal à* un, *calculer l'aire limitée par l'arc* OA *et par les tangentes aux extrémités de cet arc.*

Supposant ensuite que t désigne le temps, le point de contact de la droite mobile a un certain mouvement sur sa trajectoire K.

Trouver, à un instant quelconque, la vitesse, l'accélération normale de ce mouvement, et calculer l'énergie cinétique du point à l'instant où il passe en A, *en supposant la masse du point égale à* $\frac{1}{3}$.

II. *Trouver l'intégrale générale de l'équation*

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + x = e^{-t}\sin t + 4e^t.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Calculer la quantité* φ *déterminée par la formule*

$$\varphi = 1{,}0565\,\mathrm{L}\frac{t}{273} + 9\times 10^{-7}\left(\frac{t^2}{2} - 503\,t\right) + 0{,}0902$$

pour $t = 326$.

2° *Calculer* φ *par la formule approchée*

$$\varphi = \mathrm{L}\frac{t}{273}$$

pour la même valeur de la variable t.

3° *Trouver l'erreur relative commise en substituant la formule approchée à la formule exacte.*

NOTE. — *Dans les formules ci-dessus, la notation* La *indique le logarithme népérien de* a.

(Novembre 1906.)