Nouvelles annales de mathématiques

Paul-J. Suchar

Recherche de la loi que doit suivre une force centrale, sachant que la trajectoire est une conique, quelles que soient les conditions initiales

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 532-546

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__532_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1906, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

[R7bβ]

RECHERCHE DE LA LOI QUE DOIT SUIVRE UNE FORCE CENTRALE, SACHANT QUE LA TRAJECTOIRE EST UNE CONIQUE, QUELLES QUE SOIENT LES CONDITIONS INITIALES;

PAR M. PAUL-J. SUCHAR.

Ce problème a été résolu, comme on sait, par MM. Darboux et Halphen ([1]) dans le cas particulier où la loi de la force ne dépend que de la position du mobile. Je me propose de résoudre le problème dans le cas plus général, en supposant la loi de la force fonction de la position du mobile et des composantes de la vitesse sur les axes de coordonnées.

1. Soient

$$(1)\qquad \frac{dx}{dt} = x', \qquad \frac{dy}{dt} = y', \qquad \frac{dx'}{dt} = ux, \qquad \frac{dy'}{dt} = uy,$$

les équations du mouvement rapporté à un système d'axes, ayant pour origine le centre de la force, la masse du point étant supposée égale à 1, et u est une fonction dépendant en général de x, y, x', y'; enfin

$$(2)\qquad f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey - F = 0,$$

l'intégrale générale du système (1). Différentions (2) par rapport à t, on aura

$$(3)\qquad x'f'_x + y'f'_y = 0.$$

([1]) DARBOUX, *Comptes rendus*, t. LXXXIV.

Si nous rendons (2) homogène et si nous désignons par γ la constante des aires, on aura d'après (3) et en ayant égard au théorème d'Euler sur les fonctions homogènes

$$\frac{x'}{f'_y} = -\frac{y'}{f'_x} = \frac{\gamma}{f'_z}, \tag{4}$$

d'où

$$x' = \gamma\frac{f'_y}{f'_z}, \qquad y' = -\gamma\frac{f'_x}{f'_z}. \tag{5}$$

Différentions une seconde fois (3) par rapport à t, et, en ayant égard au théorème d'Euler sur les fonctions homogènes et aux équations (1), (2) et (3), on aura, tous calculs faits,

$$u = \gamma^2\,\frac{A f'^2_y - 2B f'_x f'_y + C f'^2_x}{f'^3_z}.$$

Remarquons que le numérateur

$$A f'^2_y - 2B f'_x f'_y + C f'^2_x,$$

pour tous les points de la conique (2), est une constante, et cette constante a pour valeur $-\Delta$, Δ étant le discriminant de la conique (2). On aura donc

$$u = -\frac{\gamma^2\Delta}{f'^3_z};$$

en ayant égard à (4), on aura enfin

$$u = -\frac{\gamma^2\Delta}{f'^3_z} = -\frac{\Delta}{\gamma}\,\frac{x'^3}{f'^3_y} = \frac{\Delta}{\gamma}\,\frac{y'^3}{f'^3_x},$$

d'où l'on déduit les trois lois de forces

$$\frac{\mu r}{(Dx+Ey+F)^3}, \quad \frac{\mu r x'^3}{(Bx+Cy+E)^3}, \quad \frac{\mu r y'^3}{(Ax+By+D)^3}. \tag{6}$$

On retrouve ainsi une des lois de MM. Darboux et

Halphen, et deux autres lois. Ces deux dernières lois ne sont pas distinctes, elles se déduisent l'une de l'autre par une permutation des axes de coordonnées. Il suffit alors de montrer que la deuxième loi satisfait bien au problème, c'est-à-dire qu'elle fera décrire à son point d'application une conique, quelles que soient les conditions initiales.

2. Nous allons nous appuyer sur la remarque suivante : soit

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y), \tag{7}$$

une équation différentielle du second ordre. Cette équation se ramène toujours à des quadratures si $f(x, y)$ est une fonction homogène et de degré -3. En effet, l'équation précédente peut s'écrire

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x^{-3}\varphi\left(\frac{y}{x}\right);$$

posons

$$y = zx, \qquad x = \frac{1}{\xi},$$

et l'équation précédente se ramène à

$$\frac{d^2z}{d\xi^2} = \varphi(z).$$

3. Considérons maintenant les équations du mouvement correspondant à la loi de force

$$\frac{\mu r x'^3}{(Bx + Cy + E)^3},$$

on aura

$$\frac{dx}{dt} = x', \qquad \frac{dy}{dt} = y',$$

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{\mu x'^3}{(Bx + Cy + E)^3}x, \qquad \frac{dy'}{dt} = \frac{\mu x'^3}{(Bx + Cy + E)^3}y.$$

On déduit des deux dernières équations

$$x'^3 \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\mu\gamma x'^3}{(Bx + Cy + E)^3},$$

où γ est la constante des aires, d'où enfin

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\mu\gamma}{(Bx + Cy + E)^3},$$

équation différentielle de la trajectoire cherchée. Cette équation se ramène au type (7) du n° 2, en faisant le changement de la variable indépendante, en posant

$$Bx + E = Bx_{,}.$$

En effectuant les calculs du n° 2, on aura pour l'équation de la trajectoire

$$(Bx + Cy + E)^2 = ax^2 + 2bx + c; \tag{8}$$

elle renferme trois paramètres ne figurant pas dans l'expression de la force. Il en résulte que les trajectoires correspondant à la loi précédente sont des coniques ayant la droite donnée

$$Bx + Cy + E = 0$$

pour diamètre, et l'axe des y pour direction conjuguée. Dans le cas particulier où la constante $C = 0$, en reprenant l'équation différentielle de la trajectoire, on trouve pour la trajectoire des coniques, ayant la droite donnée

$$Bx + E = 0$$

pour asymptote.

4. Remarquons que des deux premières lois de forces données par (6), ainsi que de leurs trajectoires correspondantes, on déduit comme conséquence les

deux lois

$$(9) \qquad \frac{\mu r}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \frac{\mu x'^3 r}{(ax^2 + 2bx + c)^{\frac{3}{2}}}.$$

On trouve ainsi la deuxième loi de MM. Darboux et Halphen, et une nouvelle loi qui satisfait au problème. On vérifie sans peine que les trajectoires correspondant à la dernière de ces lois sont des coniques tangentes aux deux droites données

$$ax^2 + 2bx + c = 0.$$

5. Nous allons montrer que des quatre lois données par (6) et (9) on peut déduire quatre autres lois distinctes. Nous allons rappeler quelques remarques faites dans un travail *Sur une transformation réciproque en Mécanique* (*Bull. de la Soc. des Sciences*, t. XXXIII).

Supposons un mobile sollicité par une force centrale, et soit

$$F = ur$$

la loi de la force ; le centre de la force étant à l'origine des axes de coordonnées, u est une fonction quelconque et r le rayon vecteur. Si le temps n'entre pas explicitement dans la fonction u, et si, pour une certaine fonction de u pouvant dépendre en général de x, y et de leurs dérivées par rapport à t, on sait déterminer le mouvement correspondant à la force F, on saura aussi déterminer le mouvement si la loi de la force est de la forme

$$F = \frac{1}{u} r,$$

où $\frac{1}{u}$ est l'inverse de la fonction précédente et sur laquelle on a fait le changement de x et y en x' et y' et de x' et y' en x et y. En effet, les équations du mouvement correspondant à la première loi de force sont

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = ux, \qquad \frac{d^2 y}{dt^2} = uy.$$

Effectuons le changement des fonctions et de la variable en posant

$$x_1 = \frac{dx}{dt} = x', \qquad y_1 = \frac{dy}{dt} = y', \qquad \frac{dt_1}{dt} = u.$$

Il résulte des équations du mouvement et de ces dernières relations qu'on aura aussi

$$x = \frac{dx_1}{dt_1} = x'_1, \qquad y = \frac{dy_1}{dt_1} = y'_1,$$

d'où l'on déduit, pour les équations du mouvement du point x_1, y_1,

$$\frac{d^2 x_1}{dt_1^2} = \frac{1}{u} x_1, \qquad \frac{d^2 y_1}{dt_1^2} = \frac{1}{u} y_1,$$

et la proposition est démontrée.

Cette transformation nous montre que la trajectoire du second point est la courbe hodographe du premier point, et inversement. Nous savons aussi, d'après le travail cité, que la courbe hodographe correspondant à une force centrale est la polaire réciproque de la trajectoire par rapport à un cercle ayant pour centre le centre de la force qui est pris aussi pour origine de l'hodographe, son rayon étant $\sqrt{\gamma}$, γ étant la constante des aires, et tournée d'un angle droit autour de ce centre. Il résulte alors que, si en particulier la trajectoire correspondant à une force centrale est une conique, la courbe hodographe sera aussi une conique, et, par conséquent, d'après l'ensemble de ces remarques, de toute loi de force centrale, faisant décrire à son point d'application une conique, on peut déduire une autre loi de force faisant aussi décrire à son point d'application une conique. Il résulte alors d'après (6) et (9) les quatre lois de force :

$$\mu\,\frac{(\mathrm{B}x'+\mathrm{C}y'+\mathrm{E})^3}{x^3}\,r,\qquad \mu\,\frac{(ax'^2+2bx'+c)^{\frac{3}{2}}}{x^3}\,r,$$

$$\mu\,(\mathrm{D}x'+\mathrm{E}y'+\mathrm{F})^3\,r,\qquad \mu\,(ax'^2+2bx'y'+cy'^2)^{\frac{3}{2}}\,r.$$

6. Il est facile de vérifier directement que ces quatre lois de force satisfont au problème. En effet, les équations du mouvement correspondant à la première loi de force sont :

$$\frac{dx'}{dt}=\mu\,\frac{(\mathrm{B}x'+\mathrm{C}y'+\mathrm{E})^3}{x^3}\,x,\qquad \frac{dx}{dt}=x',$$

$$\frac{dy'}{dt}=\mu\,\frac{(\mathrm{B}x'+\mathrm{C}y'+\mathrm{E})^3}{x_3}\,y,\qquad \frac{dy}{dt}=y',$$

d'où l'on a déduit, par division,

$$\frac{dy'}{dx'}=\frac{y}{x}.$$

Différentions cette dernière relation en prenant x' pour variable indépendante et en regardant x et y fonctions de x' par l'intermédiaire de t, on aura

$$\frac{d^2y'}{dx'^2}=\frac{\gamma}{x^2\,\dfrac{dx'}{dt}},$$

d'où enfin

$$\frac{d^2y'}{dx'^2}=\frac{\gamma}{\mu}\,\frac{1}{(\mathrm{B}x'+\mathrm{C}y'+\mathrm{E})^3},$$

qui est l'équation différentielle de la courbe hodographe correspondant au mouvement cherché. Cette équation ne diffère de l'équation du n° 3 que par le changement de x et y en x' et y' ; il en résulte, par un calcul semblable, que la courbe hodographe est une conique renfermant trois paramètres arbitraires. Il suffit ensuite, comme nous l'avons expliqué, de chercher la polaire réciproque de cette courbe par rapport au cercle en question et de la faire tourner d'un angle droit autour de ce centre pour avoir la trajectoire du mouvement. On suivra une méthode analogue pour la deuxième loi de force.

7. Dans le travail déjà cité, nous avons indiqué une formule analogue à celle de Binet, à savoir

$$-\frac{\gamma^2}{v^2}\left[\frac{d^2\frac{1}{v}}{d\alpha^2}+\frac{1}{v}\right]=\frac{rv}{F},$$

où F représente la force, v la vitesse et α l'angle de la vitesse avec l'axe polaire. A l'aide de cette formule, on vérifie que les deux dernières lois de forces satisfont aussi au problème.

8. La méthode que nous avons employée nous montre qu'il existe des lois de force satisfaisant au problème. Le problème sera déterminé et entièrement résolu si le nombre de ces lois est limité et si de plus on a déterminé toutes ces lois. Il est facile de voir que le nombre de ces lois est limité et égal à huit, et que de plus il n'existe pas d'autres lois de force que les huit lois que nous avons déjà trouvées.

En effet, supposons le centre de la force à l'origine des axes de coordonnées, la loi de la force sera alors de la forme

$$F = ur.$$

On sera alors ramené à chercher le nombre des lois de force satisfaisant au problème, en subdivisant la recherche en plusieurs cas :

1° La fonction u ne dépend que de x et y;

2° La fonction u dépend de x' et y';

3° La fonction u dépend de x' ou y' et des coordonnées x et y, ou d'une seule de ces coordonnées, ou encore d'une seule des coordonnées x ou y et de x' et y', ou d'une seule de ces composantes;

Enfin :

4° La fonction u dépend à la fois de x, y, x' et y'.

Le premier cas a été déjà résolu par MM. Darboux et Halphen. Nous allons reprendre le raisonnement, en indiquant une méthode qui s'applique dans tous les cas.

Soient :

$$F = \varphi(x, y) r$$

la loi de la force et

$$f(x, y) = 0$$

la conique correspondante.

Si nous multiplions la première des équations du mouvement correspondant à cette dernière loi de force par $-x'$ et la seconde par y', et qu'on les ajoute, on aura

$$x'^3 \frac{d^2 y}{dx^2} = -\gamma \varphi(x, y),$$

où γ est la constante des aires.

L'équation de la conique nous donne

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\Delta}{f_y'^3},$$

où Δ est le discriminant de la conique; on aura donc, en ayant égard à (4) du n° **1**,

$$\frac{\gamma^3 \Delta}{f_z'^3} = -\gamma \varphi(x, y);$$

si, de plus, nous rendons l'équation de la conique homogène, on aura, en ayant égard à l'équation de la conique,

$$f_z'^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2;$$

on aura donc finalement

$$(10) \qquad \frac{\gamma^3 \Delta}{f_z'^3} = \frac{\gamma^3 \Delta}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{\frac{3}{2}}} = -\gamma\varphi(x, y).$$

Remarquons que ces relations doivent toujours avoir lieu en tous les points de la conique $f(x, y) = 0$, et cela quelles que soient les conditions initiales; car, si l'on passe d'une conique à une autre conique de la même famille correspondant à la loi

$$F = \varphi(x, y)\, r,$$

les constantes qui figurent dans les premières fonctions de (10) varient en général avec les conditions initiales, mais ces relations auront encore lieu le long de la seconde conique.

Je dis que l'une des deux équations (10), dont l'un des membres est $-\gamma\varphi(x, y)$, doit être une identité. En effet, si le contraire a lieu, il sera alors possible d'établir entre x et y une seconde relation distincte de la relation $f(x, y) = 0$, ce qui est absurde. Il résulte alors qu'il ne peut y avoir que deux lois de force dépendant de la position du mobile, et ces deux lois sont les deux lois

$$\frac{\mu r}{(ax + by + c)^3}, \qquad \frac{\mu r}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{\frac{3}{2}}},$$

que nous avons trouvées déjà.

Il en résulte comme conséquence que, si u ne dépend que de x' et y', il ne peut y avoir que deux lois satisfaisant au problème. En effet, soit

$$F = \varphi(x', y')\, r$$

une loi de force, laquelle, d'après le n° 4, correspond, par une transformation corrélative, à la loi

$$\frac{1}{\varphi(x, y)}\, r,$$

qui, comme la première, satisfait aussi au problème; mais cette dernière loi ne dépend que de la position du mobile et, d'après la remarque précédente, il n'y a que deux lois de force répondant au problème; il s'ensuit alors qu'on ne peut avoir que les deux lois

$$\mu(ax' + by' + c)^3 r, \qquad \mu(ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2)^{\frac{3}{2}} r,$$

que nous avons trouvées déjà.

Un raisonnement analogue au premier raisonnement, et en ayant égard à (4) du n° 1, nous montre que, si la loi de la force est de la forme

$$F = \varphi(x', x, y)\, r \qquad \text{ou} \qquad F = \varphi(x', x)\, r,$$

il ne peut y avoir que deux lois, à savoir

$$\frac{x'^3 r}{(ax + by + c)^3}, \qquad \frac{x'^3 r}{(ax^2 + 2bx + c)^{\frac{3}{2}}},$$

que nous avons trouvées déjà, sans quoi il sera possible d'établir entre les coordonnées x et y une seconde relation distincte de l'équation de la conique $f(x, y) = 0$, ce qui est absurde. Il en résulte, comme conséquence, par la transformation corrélative, qu'il n'y a que les deux lois

$$x^{-3}(ax' + by' + c)^3 r, \qquad x^{-3}(ax'^2 + 2bx' + c)^{\frac{3}{2}} r.$$

Il nous reste enfin à examiner le cas où la fonction u dépend à la fois de x, y, x' et y'.

Remarquons d'abord que la loi

$$\left(\frac{\lambda' x' + \mu' y'}{\lambda x + \mu y + \nu}\right)^3 r,$$

qui résulte comme conséquence des relations (4) du n° 1, et où λ, μ, ν, λ', μ' sont des constantes, satisfait au problème, de même que la loi qui résulte par la transformation corrélative

$$\left(\frac{\lambda x' + \mu y' + \nu}{\lambda' x + \mu' y}\right) r.$$

Remarquons aussi que ces deux lois ne sont pas nouvelles, c'est-à-dire distinctes de celles que nous avons trouvées déjà. En effet, il suffit de faire une transformation des axes de coordonnées ayant la même origine, pour ramener ces lois aux deux lois

$$\frac{K x_1'^3}{(\lambda_1 x_1 + \mu_1 y_1 + \nu)^3} r_1, \qquad K_1 \frac{(\lambda_1 y_1' + \mu_1 y_1' + \nu_1)^3}{x_1^3} r_1,$$

que nous avons déjà déterminées.

Il en résulte alors que toute loi de force de la forme

$$F = \varphi(x, y, x', y') r$$

doit, d'après (4), se réduire à l'une ou l'autre des deux lois précédentes; sans quoi il sera possible de trouver entre x et y une seconde relation distincte de la conique $f(x, y) = 0$, ce qui est absurde.

En résumé, le problème est entièrement résolu et n'admet d'autres lois de force que les huit lois :

$$\mu(ax + by + c)^{-3} r, \qquad \mu(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{-\frac{3}{2}} r,$$

$$\mu(ax' + bx' + c)^3 r, \qquad \mu(ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2)^{\frac{3}{2}} r,$$

$$\mu x'^3(ax + by + c)^{-3} r, \qquad \mu x'^3(ax^2 + 2bx + c)^{-\frac{3}{2}} r,$$

$$\mu x^{-3}(ax' + by' + c)^3 r, \qquad \mu x^{-3}(ax'^2 + 2bx' + c)^{\frac{3}{2}} r.$$

9. Nous allons terminer par quelques théorèmes généraux conduisant à des trajectoires qui sont des coniques.

Théorème I. — *Si l'on donne une droite* D *et un point* O, *et si un point matériel se meut dans le plan de la droite et du point sous l'action d'une force telle que, si en chaque point de la courbe hodographe correspondant au mouvement le moment de la vitesse du point géométrique de la courbe hodographe, par rapport au point* O *pris pour origine de la courbe hodographe, est proportionnel au cube du moment de la vitesse du point correspondant de la trajectoire par rapport au même point* O *et inversement proportionnel au cube de la distance du même point de la trajectoire à la droite* D, *la trajectoire sera une conique ayant la droite* D *pour polaire et le point* O *pour pôle.*

Théorème II. — *Si un point matériel se meut dans un plan sous l'action d'une force telle que, si en chaque point de la courbe hodographe le moment de la vitesse du point géométrique de la courbe hodographe, par rapport à un point fixe* O *du plan de la trajectoire pris pour origine de l'hodographe, est proportionnel au cube du moment de la vitesse du point correspondant de la trajectoire par rapport au même point fixe, la trajectoire sera une conique ayant le point fixe pour centre.*

Théoreme III. — *Si un point matériel se meut dans un plan sous l'action d'une force telle que, si en chaque point de la courbe hodographe le moment de la vitesse du point géométrique de la courbe* *hodographe, par rapport à un point fixe du plan de la trajectoire pris pour origine de la courbe hodographe, est proportionnel au cube du moment de la vitesse du point correspondant de la trajectoire par rapport au même point, et inversement proportionnel au cube de la distance du même point de la trajectoire au point fixe, la trajectoire sera une conique ayant le point fixe pour foyer.*

Les réciproques de ces théorèmes sont aussi vraies.

La démonstration des théorèmes énoncés ci-dessus peut se faire en s'appuyant sur le théorème général suivant, qui est une interprétation géométrique de l'une des équations intrinsèques d'Euler :

Si un mobile se meut dans un plan, le moment de la vitesse du point géométrique de la courbe hodographe par rapport à un point du plan de la trajectoire pris pour origine de l'hodographe est en raison directe du cube de la vitesse du point correspondant de la trajectoire et en raison inverse du rayon de courbure.

On peut établir ce problème soit en partant de l'équation d'Euler, soit encore en partant des équations du mouvement; on aura, dans ce dernier cas,

$$x'^3 \frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{Mt}(v_1),$$

où $\mathrm{Mt}(v_1)$ est le moment de la vitesse du point géométrique de la courbe hodographe, par rapport à l'origine des axes de coordonnées qui est aussi l'origine de la courbe hodographe.

Si nous désignons par ρ le rayon de courbure en un point de la trajectoire, on aura

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left[1 + \left(\frac{y'}{x'}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\rho},$$

d'où enfin

$$\mathrm{Mt}(v_1) = \frac{v^3}{\rho}.$$

A l'aide de ce théorème, la démonstration des trois théorèmes se ramène à chercher les courbes telles qu'en chaque point on ait

$$\rho = \mathrm{K}\,\frac{d^3}{p^3}, \qquad \rho = \frac{\mathrm{K}}{p^3}, \qquad \rho = \mathrm{K}\,\frac{r^3}{p^3},$$

où K est une constante, d est la distance d'un point de la trajectoire à la droite D, p est la distance du point fixe à la tangente à la trajectoire, et r est le rayon vecteur.

Nous avons montré dans une Note, *Sur le rayon de courbure d'une conique* (*Nouv. Ann.*, 4e série, t. III), que les courbes correspondantes sont bien les coniques qui figurent dans les énoncés des théorèmes précédents.