NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LE COMTE DE SPARRE

Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1906). Solution de la question de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 456-473

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__456_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1906). SOLUTION DE LA QUESTION DE MÉCANIQUE RATIONNELLE ([1]);

PAR M. LE COMTE DE SPARRE.

1. Soient :

OR la trace du plan xOy sur le plan $\xi O \eta$;

OQ la perpendiculaire à OR dans le plan xOy, qui est, par suite aussi, la trace du plan $zO\zeta$ sur le plan xOy;

ψ l'angle de OR avec $O\xi$;

φ celui de Ox avec OR et θ celui de Oz avec $O\zeta$, comptés de gauche à droite, par rapport à $O\zeta$, OZ et OR.

Désignons de plus par p, q, r les composantes de la rotation OR, OQ et OZ ([2]).

OR, OQ, OZ étant axes principaux d'inertie, si C désigne le moment d'inertie axial, suivant OZ, et A le

---

([1]) *Voir* l'énoncé dans le numéro de septembre (p. 410).

([2]) Dans l'énoncé on désignait par p et q les composantes de la rotation suivant Ox et Oy, mais il n'y a aucun intérêt à introduire ces composantes, et il vaut mieux considérer celles suivant OR et OQ.

moment d'inertie équatorial, suivant OR et OQ, on a, pour la force vive totale,

$$2T = A(p^2 + q^2) + Cr^2.$$

D'ailleurs

$$p = \theta', \qquad q = \psi' \sin\theta, \qquad r = \varphi' + \psi' \cos\theta,$$

de sorte que

$$2T = A(\theta'^2 + \psi'^2 \sin^2\theta) + C(\varphi' + \psi' \cos\theta)^2.$$

On a ensuite, pour la fonction des forces,

$$U = -\int k M \rho \, d\rho = -\frac{1}{2} k M \rho^2 = -\frac{1}{2} k M d^2 \sin^2\theta.$$

Si l'on désigne par ω et λ les valeurs initiales de r et ψ', on aura alors, en vertu des équations de Lagrange en φ et ψ,

$$(1) \qquad \varphi' + \psi' \cos\theta = \omega,$$

$$(2) \qquad A \sin^2\theta \psi' = C\omega(\cos\theta_0 - \cos\theta) + A\lambda \sin^2\theta_0$$

A ces deux équations, on joindra celle des forces vives, qui, en tenant compte de (1), s'écrira

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} A(\theta'^2 + \psi'^2 \sin^2\theta) = {} & A(\mu^2 + \lambda^2 \sin^2\theta_0) \\ & - kM\, d^2(\sin^2\theta - \sin^2\theta_0), \end{aligned} \right.$$

où μ désigne la valeur initiale de θ'.

Les équations (1), (2) et (3) déterminent θ, φ et ψ en fonction de t, et résolvent par suite la première partie du problème.

En tirant de (2) la valeur de ψ' et la portant dans (3), on aura

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} A\theta'^2 = {} & A(\mu^2 + \lambda^2 \sin^2\theta_0) + kM\, d^2(\cos^2\theta - \cos^2\theta_0) \\ & - \frac{[A\lambda \sin^2\theta_0 + C\omega(\cos\theta_0 - \cos\theta)]^2}{A \sin^2\theta}. \end{aligned} \right.$$

Le second membre de cette équation est positif pour $\theta = \theta_0$, il est au lieu de cela négatif pour $\theta = 0$, à moins que l'on ait

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} & A\lambda \sin^2\theta_0 - C\omega(1-\cos\theta_0) \\ & \quad = 2\sin^2\frac{\theta_0}{2}\left(2A\lambda\cos^2\frac{\theta_0}{2} - C\omega\right) = 0. \end{aligned}\right.$$

Il est également négatif pour $\theta = \pi$, à moins que l'on ait

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} & A\lambda \sin^2\theta_0 + C\omega(1+\cos\theta_0) \\ & \quad = 2\cos^2\frac{\theta_0}{2}\left(2A\lambda\sin^2\frac{\theta_0}{2} + C\omega\right) = 0. \end{aligned}\right.$$

On voit qu'en général θ variera d'un maximum à un minimum.

Toutefois, si la condition (5) est satisfaite, on aura

$$(4')\quad \left\{\begin{aligned} A\theta'^2 &= A(\mu^2 + \lambda^2\sin^2\theta_0) \\ & \quad + kM\,d^2(\cos^2\theta - \cos^2\theta_0) - \frac{C^2\omega^2}{A}\operatorname{tang}^2\frac{\theta}{2}, \end{aligned}\right.$$

et θ variera de θ_1 à $-\theta_1$ [1] en passant par zéro.

Si, au lieu de cela, c'était la condition (6) qui était satisfaite, [(5) et (6) ne peuvent être satisfaits en même temps], on aurait

$$(4'')\quad \left\{\begin{aligned} A\theta'^2 &= A(\mu^2 + \lambda^2\sin^2\theta_0) \\ & \quad + kM\,d^2(\cos^2\theta - \cos^2\theta_0) - \frac{C^2\omega^2}{A}\cot^2\frac{\theta}{2}, \end{aligned}\right.$$

et θ varierait de θ_2 à $2\pi - \theta_2$ [2] en passant par π.

2. Si l'axe du solide est placé perpendiculairement

---

[1] θ_1 étant la racine comprise entre 0 et π du second membre de (4') égalé à zéro.

[2] θ_2 étant la racine comprise entre 0 et π du second membre de (4'') égalé à zéro.

à $O\zeta$ et que l'on imprime au solide une rotation autour de OZ, on aura

$$\theta = 90^\circ, \qquad \mu = \lambda = 0,$$

et, par suite, (4) devient

$$A\theta'^2 = \cos^2\theta\left(kM\,d^2 - \frac{C^2\omega^2}{A\sin^2\theta}\right)$$
$$= \frac{\cot^2\theta}{A}(kM\,d^2 A - C^2\omega^2 - kMA\,d^2\cos^2\theta),$$

et la valeur initiale de $\theta = 90^\circ$; cette équation ne peut être satisfaite que pour

$$\theta = 90^\circ, \qquad \theta' = 0.$$

Si l'on a

$$\omega^2 > \frac{kM\,d^2 A}{C^2}; \tag{7}$$

donc, dans ces conditions, on aura indéfiniment, pendant toute la suite du mouvement,

$$\theta' = 0, \qquad \theta = 90^\circ.$$

On peut d'ailleurs facilement vérifier que, si l'on dérange légèrement l'axe en donnant à μ et λ des valeurs très petites, et prenant de plus $\theta_0 = 90^\circ + \varepsilon_0$, où ε_0 est très petit, θ restera toujours très voisin de 90° pendant toute la suite du mouvement.

Posons, en effet,

$$\theta = 90^\circ + \varepsilon.$$

Si nous négligeons les termes en ε^3, ainsi que ceux en $\lambda\varepsilon^2$, on aura

$$A\frac{d\varepsilon^2}{dt^2} = A(\mu^2 + \lambda^2) + kM\,d^2(\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2) - \frac{[A\lambda - C\omega(\varepsilon_0 - \varepsilon)]^2}{A},$$

ce qui peut s'écrire

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\varepsilon^2}{dt^2} &= \mu^2 - \left(\frac{k\mathrm{M}\,d^2}{\mathrm{A}} + \frac{\mathrm{C}^2\omega^2}{\mathrm{A}^2}\right)\varepsilon_0^2 + \frac{2\lambda\mathrm{C}\omega}{\mathrm{A}}\varepsilon_0 \\ &\quad - \frac{2\mathrm{C}\omega}{\mathrm{A}}\left(\lambda - \frac{\mathrm{C}\omega}{\mathrm{A}}\varepsilon_0\right)\varepsilon - \left(\frac{\mathrm{C}^2\omega^2}{\mathrm{A}^2} - \frac{k\mathrm{M}\,d^2}{\mathrm{A}}\right)\varepsilon^2. \end{aligned}\right.$$

Si nous supposons la condition (7) satisfaite, les racines du second membre sont réelles, car ce second membre est positif pour $\varepsilon = \varepsilon_0$, et, au lieu de cela, négatif pour $\varepsilon = \pm\infty$.

Si donc, on désigne par η et η_1 ces deux racines, η étant la plus grande, on devra avoir

$$\eta > \varepsilon > \eta_1 ;$$

de plus, si

$$(9)\qquad n^2 = \frac{\mathrm{C}^2\omega^2}{\mathrm{A}^2} - \frac{k\mathrm{M}\,d^2}{\mathrm{A}}$$

n'est pas lui-même très petit, les racines η et η_1 seront elles-mêmes très petites, car nous supposons ε_0. μ et λ aussi très petits. En effet, pour $\mu = \lambda = \varepsilon_0 = 0$, η et η_1 sont tous deux nuls.

Donc, θ reste très voisin de 90° lorsqu'on trouble très peu le mouvement.

Si d'ailleurs on néglige, ainsi que nous l'avons fait, les termes en ε^3, on aura, en vertu de (8) et (9),

$$\begin{aligned} n\,dt &= \frac{\pm\, d\varepsilon}{\sqrt{(\eta - \varepsilon)(\varepsilon - \eta_1)}} \\ &= \pm \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\left(\frac{\eta - \eta_1}{2}\right)^2 - \left(\varepsilon - \frac{\eta + \eta_1}{2}\right)^2}}, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit, en supposant $t = t_0$ pour $\varepsilon = \eta$,

$$n(t - t_0) = \arccos\left(\frac{\varepsilon - \frac{\eta + \eta_1}{2}}{\frac{\eta - \eta_1}{2}}\right)$$

ou

$$(10)\qquad \varepsilon = \frac{\eta + \eta_1}{2} + \frac{\eta - \eta_1}{2}\cos n(t - t_0).$$

On aura ensuite, avec la même approximation,

$$d\psi = \frac{C\omega}{A}(\varepsilon - \varepsilon_0)\,dt + \lambda\,dt.$$

C'est-à-dire, en tenant compte de (10),

$$\frac{d\psi}{dt} = \lambda + \frac{C\omega}{A}\left(\frac{\eta + \eta_1}{2} - \varepsilon_0\right) + \frac{C\omega}{2A}(\eta - \eta_1)\cos n(t - t_0).$$

Mais

$$\frac{\eta + \eta_1}{2} = -\frac{C\omega}{A n^2}\left(\lambda - \frac{C\omega}{A}\varepsilon_0\right), \qquad n^2 = \frac{C^2\omega^2}{A^2} - \frac{kMd^2}{A},$$

de sorte que

$$\lambda + \frac{C\omega}{A n^2}\left(\frac{\eta + \eta_1}{2} - \varepsilon_0\right) = \frac{kMd^2A}{C^2\omega^2 - kMd^2A}\left(\frac{C\omega\varepsilon_0}{A} - \lambda\right),$$

$$\psi - \psi_0 = \frac{kMd^2A}{C^2\omega^2 - kMd^2A}\left(\frac{C\omega\varepsilon_0}{A} - \lambda\right)t + \frac{C\omega}{2nA}(\eta - \eta_1)\sin n(t - t_0).$$

On voit que, si le solide est dérangé tant soit peu de sa position d'équilibre, qui correspond à

$$\varepsilon_0 = \lambda = \mu = 0,$$

θ restera très voisin de 90°, mais l'axe aura un mouvement de rotation très lent, le mouvement de précession moyen ayant lieu toujours dans le même sens, à moins que l'on ait

$$\frac{C\omega\varepsilon_0}{A} = \lambda,$$

auquel cas il y aurait un simple mouvement d'oscillation, la condition (7) étant supposée remplie.

Si, au lieu de cela, on avait

$$\omega^2 < \frac{kMd^2A}{C^2},$$

on tomberait sur les fonctions exponentielles au lieu des fonctions circulaires, et, par suite, ε ne resterait pas très petit, quelque faible que fût le déplacement initial, et la rotation ne serait par suite pas stable.

On doit remarquer d'ailleurs qu'il faut non seulement que

$$C^2\omega^2 - kMd^2A$$

soit positif, mais que de plus ce ne soit pas une quantité très petite de l'ordre de λ, μ et ε_0, car, s'il en était ainsi, η et η_1 ne seraient plus très petits.

3. Pour que θ tende vers $90°$, pour t infini, il faut que $\theta = 90°$ soit racine double du second membre de l'équation (4).

D'abord, pour que ce second membre soit nul pour $\theta = 90°$, il faut

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &A(\mu^2 + \lambda^2 \sin^2\theta_0) - kMd^2\cos^2\theta_0 \\ &\qquad - \frac{(A\lambda\sin^2\theta_0 + C\omega\cos\theta_0)^2}{A} = 0. \end{aligned}\right.$$

En tenant compte de cette relation, l'équation (4) s'écrira

$$(12)\quad A\theta'^2 = \cos\theta\left[kMd^2\cos\theta - \frac{\left\{\begin{aligned}&(A\lambda\sin^2\theta_0 + C\omega\cos\theta_0)^2\cos\theta \\ &\quad - 2C\omega(A\lambda\sin^2\theta_0 + C\omega\cos\theta_0) + C^2\omega^2\cos\theta\end{aligned}\right\}}{A\sin^2\theta}\right].$$

Mais $\theta = 90°$ devant être racine double de la valeur de θ'^2, la quantité entre crochets doit être nulle pour $\theta = 90°$, ce qui exige

$$(13)\qquad A\lambda\sin^2\theta_0 + C\omega\cos\theta_0 = 0.$$

Mais, si l'on tient compte de cette relation, l'équation (11) devient

$$\mu^2 + \lambda^2 \sin^2\theta_0 - \frac{kMd^2}{A}\cos^2\theta_0 = 0. \tag{14}$$

Si l'on suppose ω et θ_0 donnés, on déduira de (13) et (14)

$$\lambda = -\frac{C\omega\cos\theta_0}{A\sin^2\theta_0}, \tag{15}$$

$$\mu^2 = \frac{\cos^2\theta_0}{A^2}\left(AkMd^2 - \frac{C^2\omega^2}{\sin^2\theta_0}\right). \tag{16}$$

Pour que cette valeur de μ soit acceptable, il faut

$$\omega^2 < \frac{kMd^2A\sin^2\theta_0}{C^2}. \tag{17}$$

Si cette condition est remplie, on aura deux valeurs de μ égales et de signes contraires répondant à la question et une seule valeur de λ.

Si l'on tient compte des relations (13) et (14) la valeur (12) de θ'^2 peut s'écrire

$$A\sin^2\theta\,\theta'^2 = \cos^2\theta\left(kMd^2 - \frac{C^2\omega^2}{A} - kMd^2\cos^2\theta\right),$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{\sin\theta\,d\theta}{\cos^2\theta\sqrt{\left(\frac{kMd^2}{A} - \frac{C^2\omega^2}{A^2}\right)\frac{1}{\cos^2\theta} - \frac{kMd^2}{A}}} = dt, \tag{18}$$

formule dans laquelle, en vertu de (17), on a

$$\frac{kMd^2}{A} - \frac{C^2\omega^2}{A^2} > 0.$$

Posons maintenant

$$\alpha^2 = \frac{kMd^2A - C^2\omega^2}{A^2}, \qquad \text{séc}^2\theta_1 = \frac{kMd^2A}{kMd^2A - C^2\omega^2},$$

la formule (18) deviendra

$$(19) \qquad \alpha\, dt = \pm \frac{d(\text{séc}\,\theta)}{\sqrt{\text{séc}^2\theta - \text{séc}^2\theta_1}},$$

formule dans laquelle il faudra prendre le signe + si θ croît avec t, donc si μ est positif et le signe — si θ décroît lorsque t croît, donc si μ est négatif. On aura donc

$$(20) \qquad \pm\, \alpha t = \mathrm{L}\, \frac{\text{séc}\,\theta + \sqrt{\text{séc}^2\theta - \text{séc}^2\theta_1}}{\text{séc}\,\theta_0 + \sqrt{\text{séc}^2\theta_0 - \text{séc}^2\theta_1}}.$$

On a d'ailleurs, en vertu de (17),

$$\sin^2\theta_0 > \frac{\mathrm{C}^2\omega^2}{k\mathrm{M}\,d^2\mathrm{A}},$$

et l'on en déduit

$$\cos^2\theta_0 < \frac{k\mathrm{M}\,d^2\mathrm{A} - \mathrm{C}^2\omega^2}{k\mathrm{M}\,d^2\mathrm{A}} = \cos^2\theta_1;$$

donc

$$\theta_0 > \theta_1.$$

Posons maintenant de nouveau

$$\alpha t_1 = \mathrm{L}\, \frac{\text{séc}\,\theta_0 + \sqrt{\text{séc}\,\theta_0 - \text{séc}^2\theta_1}}{\text{séc}\,\theta_1},$$

t_1 étant par suite positif en vertu de (19).

Nous aurons alors

$$\alpha(t_1 \pm t) = \mathrm{L}\, \frac{\text{séc}\,\theta + \sqrt{\text{séc}^2\theta - \text{séc}^2\theta_1}}{\text{séc}\,\theta_1},$$

d'où l'on déduit

$$\text{séc}\,\theta = \frac{\text{séc}\,\theta_1}{2}\left(e^{\alpha(t_1 \pm t)} + e^{-\alpha(t_1 \pm t)}\right)$$

ou

$$(21) \qquad \cos\theta = \frac{2\cos\theta_1}{e^{\alpha(t_1 \pm t)} + e^{-\alpha(t_1 \pm t)}}.$$

Si μ est positif, auquel cas il faut prendre le signe $+$, lorsque t croîtra de o à ∞, $\cos\theta$ décroîtra de $\cos\theta_0$ à zéro, et, par suite, θ croîtra de θ_0 à $90°$. Si, au lieu de cela, μ est négatif, il faudra prendre le signe $-$, et lorsque t croît de o à t_1, $\cos\theta$ croît de $\cos\theta_0$ à $\cos\theta_1$, et, par suite, θ décroît de θ_0 à θ_1, puis, lorsque t croît de t_1 à ∞, $\cos\theta$ décroît de $\cos\theta_1$ à o, et θ croît par suite de θ_1 à $90°$.

On aura ensuite, pour le calcul de ψ, en tenant compte de (13),

$$d\psi = -\frac{C\omega\cos\theta}{A\sin^2\theta}\,dt,$$

ou, en vertu de (19),

$$d\psi = \pm\frac{C\omega}{A\alpha}\,\frac{d\theta}{\sin\theta\sqrt{1-\text{séc}^2\theta_1\cos^2\theta}}.$$

Mais

$$\tan\theta_1 = \frac{C\omega}{A\alpha},$$

de sorte que l'on peut écrire

$$d\psi = \mp\tan\theta_1\,\frac{d\theta}{\sin^2\theta\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\theta}-\text{séc}^2\theta_1\cot^2\theta}}$$

ou

$$d\psi = \pm\frac{\tan\theta_1\,d(\cot\theta)}{\sqrt{1-\tan^2\theta_1\cot^2\theta}};$$

on en déduit

$$\psi-\psi_1 = \mp\arccos(\tan\theta_1\cot\theta)\ \text{[1]}$$

ou

$$\tan\theta_1\cot\theta = \cos(\psi-\psi_1). \tag{22}$$

Supposons maintenant que l'on ait pris, pour plan

---

[1] ψ_1 étant par suite la valeur de ψ qui correspond à $\theta=\theta_1$.

$\zeta O \xi$, celui dans lequel se trouve l'axe OZ pour $\theta = \theta_1$, auquel cas on a

$$\psi_1 = 90^\circ.$$

L'équation (22) devient

$$\tag{22'} \operatorname{tang}\theta = \frac{\operatorname{tang}\theta_1}{\sin\psi}.$$

Si d'ailleurs ξ, η, ζ sont les coordonnées d'un point de OZ, on a

$$\begin{aligned}
\xi &= \rho \sin\theta \cos(\psi - 90^\circ) = \quad \rho \sin\theta \sin\psi,\\
\eta &= \rho \sin\theta \sin(\psi - 90^\circ) = -\rho \sin\theta \cos\psi\\
\zeta &= \rho \cos\theta,
\end{aligned}$$

avec

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \xi^2,$$

et l'équation (22') revient à

$$\frac{\xi}{\zeta} = \operatorname{tang}\theta_1,$$

ou

$$\tag{23} \xi = \zeta \operatorname{tang}\theta_1.$$

Le lieu de OZ est donc un plan.

On a ensuite

$$\varphi' = \omega - \psi' \cos\theta,$$

donc

$$d\varphi = \omega\, dt - \cos\theta\, d\psi = \omega\, dt \pm \frac{\operatorname{tang}\theta_1 \cos\theta\, d\theta}{\sin\theta\sqrt{1 - \operatorname{séc}^2\theta_1 \cos^2\theta}}$$

ou

$$d\varphi = \omega\, dt \mp \frac{\operatorname{tang}\theta_1\, d(\operatorname{coséc}\theta)}{\sqrt{\operatorname{coséc}^2\theta - \operatorname{séc}^2\theta_1 \cot^2\theta}},$$

ou enfin

$$d\varphi = \omega\, dt \mp \frac{\sin\theta_1\, d(\operatorname{coséc}\theta)}{\sqrt{1 - \sin^2\theta_1 \operatorname{coséc}^2\theta}}.$$

Donc, en définitive,

$$\varphi - \varphi_1 = \omega(t - t_1) \pm \arc\cos\left(\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta}\right) \quad [1]$$

4. Dans le cas particulier on a

$$C = 2ml^2,$$

$$A = 2\left(\frac{1}{2}ml^2 + m\frac{l^2}{2}\right) = 2ml^2 = C,$$

$$M = 2m.$$

L'ellipsoïde d'inertie pour le point O est donc dans ce cas une sphère.

De plus

$$d^2 = \frac{l^2}{2}, \qquad kd^2 = l^2, \qquad \omega = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

de sorte que

$$kMd^2A = 4m^2l^4,$$
$$C^2\omega^2 = 2m^2l^4,$$

et l'on en déduit

$$\alpha^2 = \frac{1}{2}, \qquad \text{séc}^2\theta_1 = 2, \qquad \theta_1 = 45^\circ.$$

L'équation du plan lieu de OZ est donc, avec le choix que nous avons fait du plan $\zeta O \xi$,

$$\zeta = \xi.$$

De plus, on a

$$\cot\theta = \sin\psi,$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{e^{\frac{t_1 \pm t}{\sqrt{2}}} + e^{-\frac{t_1 \pm t}{\sqrt{2}}}},$$

$$\varphi = \omega t \pm \arc\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sin\theta}\right),$$

$$t_1 = \sqrt{2}\,\mathrm{L}\,\frac{\text{séc}\,\theta_0 + \sqrt{\text{séc}^2\theta_0 - 2}}{\sqrt{2}}.$$

---

[1] φ_1 étant la valeur de φ pour $\theta = \theta_1$ et t_1 la valeur correspondante de t.

On voit en définitive que ce cas ne présente rien de remarquable; toutefois, l'ellipsoïde d'inertie étant une sphère, le théorème des mouvements des quantités de mouvement appliqué par rapport à $O\zeta$ donne

$$A(\psi' + \varphi' \cos\theta) = \text{const.},$$

donc

$$\psi' + \varphi' \cos\theta = \text{const.} = 0 \text{ [1]}.$$

Il est facile de vérifier ce fait, on a en effet dans ce cas

$$\psi' = -\frac{\omega \cos\theta}{\sin^2\theta},$$

$$\varphi' = \omega - \psi' \cos\theta = \frac{\omega}{\sin^2\theta},$$

d'où l'on déduit

$$\psi' + \varphi' \cos\theta = 0.$$

Donc, si l'on décompose la rotation instantanée suivant les trois directions fixes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, la composante suivant $O\zeta$ est nulle. On conclut de là que le lieu de l'axe instantané par rapport aux axes fixes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ est le plan $O\xi\eta$.

Il semble que ce soit la seule particularité qui se présente dans ce cas particulier.

5. Si l'on imprime au solide une percussion perpendiculaire au plan $ZO\zeta$, donc parallèle à OR, la somme des moments des quantités de mouvement par rapport

---

[1] On a en effet

$$\psi'_0 = \lambda, \qquad \varphi'_0 = \omega - \lambda \cos\theta_0,$$

et, par suite,

$$\psi'_0 + \varphi'_0 \cos\theta_0 = \lambda \sin^2\theta_0 + \omega \cos\theta_0 = 0,$$

en vertu de l'équation (13) qui, si $A = C$, se réduit bien à

$$\lambda \sin^2\theta_0 + \omega \cos\theta_0 = 0.$$

à OR ne changera pas, et, comme cette somme est $A\theta'$, la valeur de θ' ne changera pas pendant la percussion.

Or nous pouvons prendre comme instant initial du mouvement précédant la percussion un moment quelconque de ce mouvement, et, si nous prenons celui qui précède immédiatement l'instant où la percussion se produit, on aura, au moment de la percussion,

$$\theta' = \mu, \qquad \psi' = \lambda.$$

Or, d'après ce que nous venons de dire, θ' ne change pas pendant la percussion. On aura donc encore, après cette percussion,

$$\theta' = \mu.$$

Si d'ailleurs λ_1 désigne la valeur de λ et ω_1 celle de ω, après la percussion, on devra avoir, d'après ce que nous avons vu, pour que, dans le mouvement subséquent, OZ tende vers une position particulière perpendiculaire à $O\zeta$ (1),

$$\lambda_1 = -\frac{C\omega_1 \cos\theta_0}{A\sin^2\theta_0},$$

$$\mu^2 = \frac{\cos^2\theta_0}{A^2}\left(AkM\,d^2 - \frac{C^2\omega_1^2}{\sin^2\theta_0}\right) \text{ (2)}.$$

Ces équations doivent ici servir à déterminer ω_1 et λ_1. D'ailleurs ω et λ (valeurs avant la percussion) vérifient, en vertu des relations (15) et (16), les équations

$$\lambda = -\frac{C\omega\cos\theta_0}{A\sin^2\theta_0}, \qquad \mu^2 = \frac{\cos^2\theta_0}{A^2}\left(AkM\,d^2 - \frac{C^2\omega^2}{\sin^2\theta_0}\right).$$

---

(1) Équations (15) et (16).

(2) θ_0 désigne ici la valeur de θ au moment où la percussion se produit.

On déduit par suite de là

$$\omega_1 = \pm \omega, \qquad \lambda_1 = \pm \lambda,$$

les signes se correspondant.

Comme on ne peut prendre $\omega = \omega_1$, $\lambda = \lambda_1$, car il faudrait alors qu'il n'y eût pas de percussion, on devra prendre

$$\omega = -\omega_1, \qquad \lambda = -\lambda_1.$$

Désignons alors par P la percussion et par u et v les coordonnées de son point d'application dans le plan QOZ, par rapport aux axes OQ et OZ, le théorème des moments des quantités de mouvement par rapport à OQ et OZ donnera, si l'on désigne par ψ'_1 et r_1 les valeurs de ψ' et r après la percussion,

$$A \sin \theta_0 (\psi' - \psi'_1) - P v = 0 \ (^1),$$
$$C(r - r_1) + P u.$$

D'ailleurs, d'après ce que nous venons de dire, on a

$$\psi' = \lambda = -\psi'_1, \qquad r = \omega = -r_1.$$

On aura donc

$$2 A \lambda \sin \theta_0 - P v = 0,$$
$$2 C \omega + P u = 0,$$

et l'on en déduit

$$(24) \qquad C \omega v + A \lambda \sin \theta_0 u = 0.$$

Mais les composantes de la rotation instantanée dans le plan ZOQ sont

$$\omega \quad \text{et} \quad \lambda \sin \theta_0,$$

suivant OZ et OQ.

---

(1) θ_0 désignant toujours ici la valeur de θ au moment où la percussion se produit.

De sorte que l'équation de la projection de l'axe instantané sur le plan ZOQ est

$$(25)\qquad v = \frac{\omega}{\lambda \sin \theta_0} u;$$

de plus, l'équation de la section de l'ellipsoïde d'inertie par le plan ZOR est

$$(26)\qquad A u^2 + C v^2 = 1,$$

et l'équation du diamètre conjugué de la direction (25) dans l'ellipse (26) sera précisément la droite (24).

Donc, pour que le mouvement qui se produit après la percussion, OZ, tende vers une position limite perpendiculaire à $O\zeta$, il faut que cette percussion soit appliquée suivant une ligne d'action qui est le diamètre conjugué, dans la section de l'ellipsoïde d'inertie par le plan $ZO\zeta$, de la composante de la rotation instantanée dans ce plan, au moment où la percussion se produit.

Quant au mouvement subséquent qui se produit après la percussion, comparé à celui qui se serait produit sans l'intervention de la percussion, il en diffère, d'après ce que nous avons vu, par le changement de ω en $-\omega$, et de λ en $-\lambda$.

Or, dans l'expression de θ', ω ne figure que par son carré ([1]), donc les valeurs de θ seront les mêmes dans les deux cas, puisque θ part de la même valeur initiale.

Au lieu de cela, les valeurs de ψ' seront égales et de signes contraires, et il en sera de même de celles de φ'.

([1]) Il faut d'ailleurs prendre dans les deux cas le même signe dans l'expression de θ', puisque la percussion ne modifie pas cette quantité.

Il résulte de là que, si ψ_0 est la valeur initiale de ψ au moment où la percussion se produit, on devra, pour passer d'un mouvement à l'autre, remplacer $\psi - \psi_0$ par $\psi_0 - \psi$, et, de plus, les composantes de la rotation suivant OZ seront égales et de sens contraire.

On conclut de là que le nouveau déplacement de l'axe OZ, après la percussion, sera symétrique par rapport au plan passant par $O\zeta$, et la position de OZ au moment où la percussion se produit, de celui que OZ aurait pris sans la percussion.

Remarque. — Je crois devoir faire suivre cette solution de la remarque suivante : ce problème est sans aucun doute très bien choisi et intéressant, mais on ne s'explique pas très bien pourquoi l'on a ajouté le n° 4, en demandant l'étude du mouvement dans ce cas particulier, et en se bornant à en demander ses circonstances principales dans le cas général (n° 3). Le cas général se traite en effet tout aussi simplement que ce cas particulier, et les résultats sont tout aussi simples.

Il semble qu'il n'y ait autre chose à faire que de traiter d'une façon complète, ainsi que je l'ai fait, le cas général (n° 3), et d'appliquer ensuite les résultats au cas particulier (n° 4), en se bornant à constater qu'il ne présente rien de spécial.

Si, au lieu de cela, on suivait la marche que semblent indiquer les données, en se bornant à une étude sommaire du cas général, et en traitant complètement le cas particulier, on serait, pour cette étude du cas particulier, conduit aux mêmes calculs que l'on aurait eu à faire pour traiter complètement le cas général, et l'on aurait été conduit à traiter successivement deux questions qui n'en font au fond qu'une.

Il y a lieu aussi de remarquer que la note qui suivait l'énoncé indiquait de considérer les composantes de la rotation suivant Ox et Oy, tandis qu'il était plus simple de considérer, ainsi que je l'ai fait, les composantes suivant OR et OQ, d'autant plus que l'on était par là plus naturellement conduit à reconnaître que, dans le n° 5, la ligne d'action de la percussion doit être le diamètre conjugué de la composante de la rotation dans le plan ZOQ.