NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

R. BRICARD

Sur la géométrie de direction dans l'espace

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 433-454

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__433_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1906, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

[P6b]

SUR LA GÉOMÉTRIE DE DIRECTION DANS L'ESPACE;

Par M. R. BRICARD.

1. J'ai montré dans un précédent article [1] comment la *géométrie de direction* dans le plan se rattache naturellement à la géométrie de l'espace. En particulier, les transformations par *semi-droites réciproques de Laguerre* dérivent des transformations homographiques involutives, qui changent en lui-même un cône du second ordre, ou bien, en modifiant légèrement le point de vue, des transformations involutives de l'espace qui n'altèrent pas les longueurs d'une figure (ces opérations sont la symétrie par rapport à un point, par rapport à une droite ou par rapport à un plan).

On peut de même rattacher les *transformations par semi-plans réciproques* de l'espace, auxquelles Laguerre a consacré une courte Note [2], à certaines transformations de l'espace à quatre dimensions. Je me propose, dans le présent travail, de développer cette indication que j'ai donnée à la fin de mon premier article.

2. Je rappellerai d'abord quelques définitions et propositions relatives à la géométrie de direction.

Une surface (qui n'est pas à un seul côté) partage l'espace en deux régions, et l'on peut donner arbitrai-

[1] *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 1906, p. 159.

[2] *Comptes rendus,* 1881; *Œuvres,* t. II, p. 604.

rement à l'une de ces régions le nom de région *positive*, à l'autre le nom de région *négative* (1); on désignera sous le nom de *semi-surface* une surface ainsi définie.

Par exemple un plan *porte* deux semi-plans que l'on peut appeler *opposés* et que l'on doit regarder comme deux semi-surfaces distinctes. De même une sphère porte deux semi-sphères opposées.

Pour que deux semi-surfaces se touchent en un point, il faut non seulement qu'elles aient même plan tangent en ce point, mais que les régions positives par rapport aux deux semi-surfaces soient les mêmes dans le voisinage de ce point. De là résultent immédiatement les propositions suivantes :

On ne peut mener à une semi-sphère qu'un semi-plan parallèle à un semi-plan donné; il existe une semi-sphère et une seule touchant quatre semi-plans donnés; il existe un semi-cône de révolution et un seul touchant trois semi-plans donnés; il existe une semi-sphère et une seule inscrite à un semi-cône de révolution donné et tangente à un semi-plan donné.

Ce qui précède est extrait presque textuellement de la Note de Laguerre. Je ferai encore les conventions suivantes : la distance d'un point à un semi-plan sera considérée comme positive si le point est dans la région positive par rapport au semi-plan, et comme négative dans le cas contraire; le rayon d'une semi-sphère sera considéré comme positif si la région positive par rapport à cette semi-sphère en contient le centre, et comme négatif dans le cas contraire.

---

(1) Laguerre emploie les mots de *région extérieure, région intérieure;* cette terminologie peut donner lieu à des confusions.

On voit immédiatement que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un semi-plan et une semi-sphère soient tangents est que la distance au semi-plan du centre de la semi-sphère soit égale en grandeur et en signe au rayon de la semi-sphère.*

3. *Représentation dans l'étendue* [1] *des semi-plans et des semi-sphères.* — Considérons un plan réel, représenté en coordonnées cartésiennes rectangulaires par l'équation

$$(1) \qquad \xi x + \eta y + \zeta z + 1 = 0,$$

où ξ, η, ζ sont les coefficients. Le plan (1) porte deux semi-plans. Je dirai que le premier a pour *coordonnées*

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad +\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},$$

et le second

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad -\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}.$$

Ainsi à tout système de nombres ξ, η, ζ, τ, satisfaisant à la relation

$$(2) \qquad \xi^2+\eta^2+\zeta^2-\tau^2 \equiv 0,$$

correspond un semi-plan (P) bien déterminé.

Étant donné un semi-plan (P) de coordonnées ξ, η, ζ, τ, nous conviendrons de prendre pour région positive relative au semi-plan la région des points x, y, z, tels que l'expression

$$\frac{\xi x + \eta y + \zeta z}{\tau}$$

[1] J'emploierai, pour parler de l'espace à quatre dimensions, le mot d'*étendue,* introduit par M. Jouffret dans son *Traité élémentaire de Géométrie à quatre dimensions* (Paris, Gauthier-Villars, 1904).

soit positive. En vertu de cette convention, et de celle qui a été faite plus haut relativement au signe de la distance d'un point à un semi-plan, l'expression précédente représente en grandeur et en signe la distance au semi-plan (P) du point x, y, z.

Soient maintenant λ, μ, ν les coordonnées du centre d'une semi-sphère (S), ρ son rayon (positif ou négatif). Pour que le semi-plan (P) et la semi-sphère (S) soient tangents, il faut et il suffit que l'on ait la relation

$$\frac{\lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta + 1}{\tau} = \rho,$$

ou

$$\lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta - \rho\tau + 1 = 0. \tag{3}$$

Les relations (2) et (3) peuvent être interprétées dans l'étendue.

La relation (2), si l'on considère ξ, η, ζ, τ comme coordonnées cartésiennes d'un point de l'étendue, représente un *hypercône du second degré* [H].

Ainsi, à tout semi-plan (P) correspond un point ϖ de l'hypercône [H]. Je dirai que ϖ est le point représentatif du semi-plan.

Considérons en second lieu l'équation

$$\lambda x + \mu y + \nu z - \rho\tau + 1 = 0;$$

elle représente un *espace linéaire* qui coupe l'hypercône [H] suivant une quadrique (Σ). Je dirai que cet espace et cette quadrique sont représentatifs de la sphère (S).

Ainsi les points de l'hypercône [H] sont représentatifs des divers semi-plans de l'espace; les quadriques tracées sur cet hypercône sont représentatives des diverses semi-sphères.

L'équation (3) admet dès lors cette interprétation immédiate :

Pour qu'un semi-plan touche une semi-sphère, il faut et il suffit que le point représentatif du premier soit sur la quadrique représentative de la seconde.

Faisons encore les remarques évidentes que voici :

Les deux semi-plans portés par le plan de l'infini ont leurs points représentatifs confondus au sommet O *de* [H].

Des semi-plans parallèles ont leurs points représentatifs sur une même génératrice de [H]. *La correspondance entre les semi-points et les plans est homographique.*

Les divers semi-plans tangents à un même semi-cône de révolution (Γ) *ont leurs points représentatifs distribués sur une même conique* C *tracée sur* [H]. Réciproquement, à toute conique tracée sur [H] correspond un semi-cône de révolution. *La correspondance entre un semi-plan mobile qui enveloppe* (Γ) *et son point représentatif qui décrit* C *est homographique.*

La première partie de ce dernier énoncé résulte de ce que les semi-plans en question sont tangents à une infinité de sphères. Leurs points représentatifs appartiennent donc à une infinité d'espaces linéaires et par conséquent à un plan. Ils sont donc répartis sur l'intersection de ce plan et de [H], c'est-à-dire sur une conique.

Quant à la seconde partie, elle résulte immédiatement de ce que la correspondance entre le point et le semi-plan est univoque.

4. *Transformations homographiques involutives de l'hypercône* [H] *en lui-même.* — Les transformations homographiques de l'étendue sont en nombre ∞^{24}. Un hypercône du second degré dépendant de 13 paramètres, celles de ces transformations qui changent en lui-même l'hypercône [H] sont au nombre de $\infty^{24-13} = \infty^{11}$. A chacune de ces transformations correspond une transformation de contact de l'espace qui change les semi-plans en semi-plans et les semi-sphères en semi-sphères. Je dirai plus loin un mot de ces transformations générales. Nous ferons ici une étude approfondie de celles qui présentent un caractère *involutif*.

Toute transformation involutive de l'étendue appartient, comme on le sait et comme il est aisé de le démontrer, à l'un des deux types suivants :

1° *L'homologie centrale involutive,* définie par un point c, le *centre* de l'homologie et un espace linéaire [E], *l'espace-base* de l'homologie ; m étant un point quelconque de l'étendue, l'homologie centrale involutive lui fait correspondre le point m' construit de la façon suivante : On joint le point m au centre c; la droite cm rencontre [E] en un point μ, et l'on construit le point m', conjugué harmonique de m par rapport au segment $c\mu$.

2° *L'homologie axiale involutive*, définie par une droite D et un plan (P) qui sont respectivement la *droite-axe* et le *plan-axe* de l'homologie. Au point m l'homologie axiale involutive fait correspondre le point m' obtenu de la façon suivante : On construit la droite unique passant par le point m et qui rencontre D et (P) [1], respectivement aux points μ et μ'. Le

---

[1] Cette droite est l'intersection du plan déterminé par m et D et de l'espace déterminé par m et (P).

point m' est le conjugué harmonique de m par rapport au segment $\mu\mu'$.

Pour qu'une transformation de la première ou de la seconde espèce transforme en lui-même l'hypercône [H], il faut que le sommet de cet hypercône soit un point double de la transformation. Or les points doubles de la transformation sont, dans le cas de l'homologie centrale, le centre et tous les points de l'espace-base ; dans le cas de l'homologie axiale, tous les points de la droite-axe et tous les points du plan-axe. On se trouve ainsi en présence de quatre cas possibles, dont l'examen conduit aisément aux conclusions suivantes :

Il existe *quatre* espèces de transformations homographiques involutives, qui transforment en lui-même un hypercône du second degré [H]. Ce sont respectivement :

a. Une homologie centrale involutive, dont le centre est le sommet de l'hypercône, l'espace-base étant quelconque ;

b. Une homologie centrale involutive, dont le centre est un point quelconque de l'étendue, et l'espace-base, l'espace polaire de ce point par rapport à l'hypercône ;

c. Une homologie axiale involutive, dont la droite-axe est une droite quelconque de l'étendue, et dont le plan-axe est le plan conjugué de cette droite par rapport à l'hypercône ;

d. Une homologie axiale involutive, dont le plan-axe est un plan quelconque de l'étendue, et la droite-axe, la droite conjuguée de ce plan par rapport à l'hypercône (1).

---

(1) Le lecteur, non familiarisé avec les conceptions de la géomé-

Dans l'étendue, un point et un espace dépendent chacun de quatre paramètres, une droite et un plan dépendent chacun de six paramètres ([1]). On en conclut *que les transformations* (a) *et* (b) *dépendent de quatre paramètres et les transformations* (c) *et* (d) *de six paramètres.*

5. *Transformations par semi-plans réciproques.* — Les quatre transformations (a), (b), (c), (d), de l'hypercône [H] en lui même sont représentatives de quatre transformations de l'espace, associant un semi-plan à un semi-plan, et qui seront dites *transformations par semi-plans réciproques.* Je les appellerai respectivement (α), (β), (γ), (δ).

---

trie à quatre dimensions, comprendra facilement, je pense, le sens des expressions employées dans le texte, sans que de longues explications soient necessaires Etant donnee une *hyperquadrique*, representee par l'équation homogene du second degré à cinq variables

$$f(x, y, z, t, u) = 0,$$

l'*espace polaire* du point x_0, y_0, z_0, t_0, u_0 par rapport a l'hyperquadrique est l'espace ayant pour equation

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 y + \ldots = 0$$

Si un point décrit une droite, son espace polaire tourne autour d'un plan qui est le *plan conjugue* de la droite par rapport a l'hyperquadrique. De même, si un point decrit un plan, etc

Si l'hyperquadrique se reduit à un hypercône, l'espace polaire d'un point quelconque, le plan conjugue d'une droite quelconque, la droite conjuguee d'un plan quelconque contiennent le sommet de l'hypercône.

Les points et leurs espaces polaires, les droites et les plans conjugues donnent lieu a des théoremes que l'on etablit aisement en se guidant sur les theoremes analogues et bien connus de la geométrie plane et de la geométrie de l'espace.

([1]) En effet, une droite est definie par les deux points ou elle rencontre deux espaces donnes ($3+3=6$ parametres), un plan est correlatif d'une droite et dépend du même nombre de parametres

Toutes ces transformations jouissent d'une même propriété : à des semi-plans tangents à une même semi-sphère, elles font correspondre des semi-plans tangents à une même semi-sphère. Autrement dit, *elles changent les semi-sphères en semi-sphères*. Cela résulte immédiatement de ce que les transformations (a), (b), (c), (d), étant homographiques, changent une quadrique tracée sur [H] en une autre quadrique.

Il faut maintenant chercher à définir (α), (β), (γ), (δ), en restant dans l'espace ordinaire. C'est ce que je vais faire successivement pour chacune de ces transformations.

6. *Transformation* (α). — Dans la transformation (a), deux points correspondants sont sur une même génératrice de [H]. Donc, dans la transformation (α), deux semi-plans réciproques sont parallèles.

En second lieu, il existe, dans la transformation (a), une infinité de points qui se correspondent à eux-mêmes : ce sont les points de la quadrique (S_0), intersection de [H] et de l'espace-base de l'homologie. Il existe donc dans la transformation (α) une semi-sphère (Σ_0) qui se correspond à elle-même.

Soient enfin p et p' deux points de [H], se correspondant dans la transformation (a), p_0 le point où pp' rencontre l'espace-base de l'homologie, c'est-à-dire la quadrique (S_0). Si O est le sommet de [H], les points p et p' divisent harmoniquement le segment Op_0. On peut donc énoncer le résultat suivant, en tenant compte des deux remarques faites à la fin du n° 3 : Soient (Π) et (Π') deux semi-plans réciproques dans la transformation (α), (Π_0), le semi-plan, parallèle à (Π) et à (Π'), qui touche la semi-sphère (Σ_0) ; les plans (Π) et (Π') sont équidistants du plan (Π_0).

En raisonnant comme dans mon premier article (p. 167), on reconnaît que la transformation (α) n'est autre chose que la combinaison d'une transformation parallèle et d'une symétrie par rapport à un point : *étant donné un semi-plan* (Π), *on construit le plan* (Π_1), *parallèle à* (Π), *situé à une distance donnée et d'un côté donné de ce semi-plan, puis le semi-plan* (Π'), *symétrique de* (Π_1) *par rapport à un point fixe* ω *et orienté comme le semi-plan* (Π).

7. *Transformation* (β). — Dans la transformation (b), deux points correspondants p et p' de l'hypercône sont en ligne droite avec le centre de l'homologie. Si donc on désigne par (ξ, η, ζ, τ), (ξ', η', ζ', τ'), (ξ_0, η_0, ζ_0, τ_0) les coordonnées respectives des points p, p', p_0, on peut trouver deux nombres λ et μ tels que l'on ait les relations

$$\begin{aligned} \lambda\xi + \mu\xi' &= \xi_0, \\ \lambda\eta + \mu\eta' &= \eta_0, \\ \lambda\zeta + \mu\zeta' &= \zeta_0, \\ \lambda\tau + \mu\tau' &= \tau_0, \\ \lambda + \mu &= 1. \end{aligned}$$

Mais les trois premières et la cinquième de ces relations peuvent s'interpréter ainsi : les trois plans ayant pour équations dans l'espace ordinaire

$$\begin{aligned} \xi x + \eta y + \zeta z + 1 &= 0, \\ \xi' x + \eta' y + \zeta' z + 1 &= 0, \\ \xi_0 x + \eta_0 y + \zeta_0 z + 1 &= 0 \end{aligned}$$

passent par une même droite. Donc :

Deux semi-plans (Π) *et* (Π'), *réciproques dans la transformation* (β), *se coupent suivant une droite appartenant à un plan fixe* (Π_0).

Soient en outre sur [H] deux points quelconques p et p_1, et les deux points p' et p'_1 qui leur correspondent respectivement dans la transformation (b). Les quatre points p, p_1, p', p'_1 sont dans un même plan, puisque les droites pp' et $p_1p'_1$ sont concourantes. Les semi-plans concourants de l'espace (Π), (Π_1), (Π'), (Π'_1) sont donc tangents à un même semi-cône de révolution (n° 4).

L'analyse précédente permet d'énoncer le résultat suivant :

Une transformation (β) *est définie par un plan fixe* (Π_0) *et par un couple donné de semi-plans réciproques* (Π) *et* (Π'), *se coupant suivant une droite du plan* (Π_0). *Si* (Π_1) *est un semi-plan quelconque, on obtiendra comme il suit son semi-plan réciproque : on construira le semi-cône de révolution tangent à* (Π), (Π') *et* (Π_1), *et par la droite commune à* (Π_1) *et à* (Π_0) *on mènera le second semi-plan tangent au semi-cône. Ce sera le semi-plan* (Π') *cherché.*

On voit bien qu'une transformation (β) dépend de quatre paramètres.

La transformation (β) est la seule qu'ait définie Laguerre dans la Note rappelée plus haut. Elle fait l'objet d'une étude approfondie dans la *Théorie des surfaces* de M. Darboux (t. I, p. 251 et suiv.).

8. *Transformation* (γ). — Les points de l'hypercône [H] qui se correspondent à eux-mêmes dans l'homologie axiale involutive (c) sont le sommet O de cet hypercône et les deux points p_1 et p_2 où la droite-axe de cette homologie le rencontre. Soient maintenant p et p' deux points de [H], se correspondant

dans la même transformation. Puisque les droites pp' et p_1p_2 se rencontrent, les quatre points p, p', p_1, p_2 sont dans un même plan et appartiennent à la conique C, intersection de ce plan et de [H]. Soit en outre m le point d'intersection du même plan et du plan-axe de l'homologie (c), plan qui, on se le rappelle, est le plan conjugué par rapport à [H] de la droite-axe p_1p_2. Le point m est le pôle de p_1p_2 par rapport à la conique C (¹); mais le point m appartient à la droite pp', puisque cette droite doit rencontrer le plan-axe de l'homologie. Par conséquent, les points p et p' sont conjugués harmoniques sur la conique C par rapport aux points p_1 et p_2.

Aux points p, p', p_1, p_2 correspondent quatre semi-plans tangents à un même semi-cône de révolution, et les deux premiers sont conjugués harmoniques par rapport aux deux derniers. Nous pouvons donc formuler les conclusions suivantes :

La transformation (γ) *est définie par deux semi-plans* (Π_1) *et* (Π_2) *qui se correspondent à eux-mêmes; ce sont les semi-plans doubles de la transformation. Pour avoir le semi-plan réciproque d'un semi-plan* (Π), *on procédera de la façon suivante : on construira le semi-cône de révolution tangent à* (Π), (Π_1) *et* (Π_2), *puis le semi-plan* (Π'), *tangent à ce semi-cône et conjugué harmonique de* (Π) *par rapport à* (Π_1) *et* (Π_2). (Π') *est le semi-plan cherché.*

(¹) En vertu de ce théorème : *Si dans l'étendue un plan tourne autour d'une droite, le pôle de cette droite par rapport à la conique d'intersection du plan et d'une hyperquadrique fixe décrit le plan conjugué de la droite par rapport à l'hyperquadrique.*

On peut dire encore que le plan qui contient les génératrices de contact des plans (Π) et (Π') contient aussi la droite commune aux plans (Π_1) et (Π_2).

La transformation (γ), définie par deux semi-plans arbitraires, dépend de six paramètres.

9. *Transformation* (δ). — Les points de l'hypercône [H] qui se correspondent à eux-mêmes dans l'homologie axiale involutive (d) sont le sommet O et tous les points de la conique C, intersection de l'hypercône et du plan-base de l'homologie.

Soient p et p' deux points correspondants quelconques dans l'homologie (d). Ces deux points et le plan de la conique C sont dans un même espace linéaire [E], puisque la droite pp' rencontre le plan dont il s'agit. Autrement dit, les deux points p, p' et la conique C appartiennent à une même quadrique (S), intersection de [H] et de [E]. Soit maintenant m le point d'intersection de [E] et de la droite-axe de l'homologie. Le point m est sur la droite pp', puisque cette droite doit rencontrer la droite-axe; d'autre part, le point m est le pôle par rapport à (S) du plan de la conique C [1]. Ainsi la droite pp' passe par le pôle du plan de la conique C par rapport à la quadrique (S).

On peut dire aussi que, si D est une conique quelconque tracée sur (S) et passant par p et p', les deux points p et p' sont conjugués harmoniques, sur D, par rapport aux deux points communs à C et à D.

Interprétons ces résultats dans l'espace : à la conique C correspond un semi-cône de révolution (Γ);

---

[1] En vertu de ce théorème : *Si un espace linéaire tourne autour d'un plan, son pôle par rapport à une hyperquadrique décrit la droite conjuguée du plan par rapport à cette hyperquadrique.*

si (Π) et (Π′) sont deux semi-plans réciproques dans la transformation (δ), il existe une semi-sphère (Σ) tangente à (Π), (Π′) et inscrite au semi-cône (Γ). Enfin, si l'on imagine un semi-cône de révolution (Δ) circonscrit à (Σ) et tangent à (Π) et à (Π′), ces deux semi-plans sont, relativement au semi-cône (Δ), conjugués harmoniques par rapport aux semi-plans tangents communs à (Γ) et à (Δ).

On en conclut que (Π) et (Π′) se coupent sur le plan du cercle de contact de (Γ) et de (Σ), et l'on parvient au résultat suivant :

La transformation (δ) *est définie par un semi-cône de révolution fixe* (Γ). *Pour construire le semi-plan réciproque d'un semi-plan donné* (Π), *on construira la semi-sphère* (Σ) *inscrite à* (Γ) *et tangente à* (Π); *puis, par la droite commune à* (Π) *et au plan du cercle de contact de* (Γ) *et de* (Σ), *on mènera le second semi-plan tangent à* (Σ). *C'est le semi-plan cherché* (Π′).

On voit aussi que les points de contact de (Π) et de (Π′) sont alignés sur le sommet de (Γ).

La transformation (δ), définie par un semi-cône de révolution, dépend de six paramètres.

10. *Autre point de vue.* — Opérons sur l'hypercône [H] une transformation par polaires réciproques, de manière à transformer cet hypercône dans *la sphère imaginaire de l'infini,* dont l'équation tangentielle est

$$u^2 + v^2 + w^2 + h^2 + k^2 = 0.$$

Nous pourrons dire que toutes les transformations par semi-plans réciproques représentent dans l'espace les *transformations homographiques involutives de* *l'étendue, qui conservent la sphère imaginaire de l'infini.*

Je désignerai ces transformations, corrélatives des transformations (a), (b), (c), (d), respectivement par (a'), (b'), (c'), (d'). Il est facile de les définir directement. Ainsi la transformation (a) est une homologie centrale involutive dont le centre est le sommet de l'hypercône [H]; (a') est donc aussi une homologie centrale involutive, ayant pour espace-base l'espace de l'infini, c'est-à-dire une *symétrie par rapport à un point.* La transformation (b) est une homologie centrale involutive, dont l'espace-base est l'espace polaire du centre de l'homologie par rapport à [H]; (b') est donc une homologie centrale involutive, dont le centre est rejeté à l'infini perpendiculairement à l'espace-base, c'est-à-dire une *symétrie par rapport à un espace linéaire.* La transformation (c) est une homologie axiale involutive, dont le plan-axe est le plan polaire de la droite-axe par rapport à [H] ; (c') est donc une homologie axiale involutive, dont la droite-axe est rejetée à l'infini perpendiculairement au plan-axe, c'est-à-dire *une symétrie par rapport à un plan.* Enfin, la transformation (d') est *une symétrie par rapport à une droite.*

Les quatre transformations (a'), (b'), (c'), (d') sont les similitudes involutives de l'étendue. On voit donc, en résumé, que :

Les transformations (a), (b), (c), (d) peuvent être considérées comme représentant dans l'espace les similitudes involutives de l'étendue (c'est-à-dire les opérations qui transforment une figure en une figure semblable, et qui, deux fois répétées, ramènent la figure en coïncidence avec elle-même).

Les transformations (*a*), (*b*), (*c*), (*d*) *correspondent aux symétries de l'étendue, respectivement par rapport à un point, à un espace linéaire, à un plan et à une droite.*

Ainsi que je l'ai rappelé à la fin de mon premier article, M. Butin avait déjà rattaché la transformation (*b*) à la symétrie par rapport à un espace linéaire [1].

On voit que, plus généralement, les similitudes de l'étendue font connaître les transformations de l'espace (non involutives en général) qui associent un semi-plan à un semi-plan et une semi-sphère à une semi-sphère. La transformation la plus générale de cette nature dépend, comme je l'ai dit plus haut, de onze paramètres.

Le groupe ainsi constitué pourrait donner lieu à des recherches d'un certain intérêt : on chercherait, par exemple, à définir le sous-groupe des transformations (à dix paramètres) qui correspondent aux *déplacements* dans l'étendue; on définirait aussi les sous-groupes finis ou non qui correspondent aux sous-groupes de déplacements (groupes de rotations autour de droites ou de plans concourants, groupe des polyèdres réguliers de l'étendue). Je laisserai complètement de côté les questions de cette nature.

11. Une transformation par semi-plans réciproques étant une transformation de contact, il est important de résoudre le problème suivant :

Construire l'élément de contact correspondant à un élément de contact donné. Autrement dit, soient (Π) *un semi-plan,* (Π') *le semi-plan réciproque dans*

---

[1] *Bulletin des Sciences mathématiques,* 1906, p. 19.

l'une des transformations (α), (β), (γ), (δ). *On donne le point* μ *où* (Π) *touche une surface donnée. Construire le point* μ' *où le plan* (Π') *touche la surface réciproque de la première.*

J'établirai, en premier lieu, une proposition qui s'applique à chacune des transformations (α), (β), (γ), (δ).

Si le point μ varie dans le semi-plan (Π), le point μ' varie en même temps dans le semi-plan (Π'). Cherchons la nature de la correspondance qui relie les points μ et μ'.

Il est tout d'abord évident que cette correspondance est algébrique et rationnelle. Remarquons en second lieu que, si le semi-plan (Π) varie en enveloppant une développable, il en est de même du semi-plan (Π'), et les caractéristiques des deux semi-plans se correspondent évidemment. Autrement dit, si le point μ se déplace dans le semi-plan (Π) sur une droite, il en est de même pour le point μ' dans le semi-plan (Π'). On en conclut que la correspondance entre les points μ et μ' est *homographique*.

En outre, si le point μ décrit un cercle dans le semi-plan (Π), le point μ' décrit aussi un cercle dans le semi-plan (Π'). En effet, un cercle peut être caractérisé comme étant, de deux manières différentes, enveloppe d'une famille de sphères : les sphères de l'une des familles sont celles qui passent par le cercle, les autres sont les sphères-points dont le lieu est ce même cercle. L'une quelconque des transformations que nous considérons fait donc correspondre à un cercle une surface enveloppe de sphères de deux manières différentes, c'est-à-dire une *cyclide de Dupin*. Donc, quand le point μ décrit un cercle dans (Π), le point μ' décrit la courbe de contact de (Π') et d'une cyclide de

Dupin. Une telle courbe est nécessairement un cercle, comme il est bien connu.

On voit donc qu'il existe entre les points μ et μ' une correspondance homographique, telle qu'à un cercle quelconque décrit par le point μ correspond un cercle : cette correspondance est donc une *similitude ;* enfin, en raison du caractère involutif des transformations considérées, le rapport k qui définit cette similitude doit satisfaire à la relation

$$k^2 = 1, \qquad \text{d'où} \qquad k = \pm 1.$$

Ainsi la similitude dont il s'agit est une égalité *directe* ou *inverse* [1].

En résumé, *les points de contact du semi-plan* (Π) *avec diverses surfaces et les points de contact du semi-plan* (Π') *avec les surfaces qui correspondent aux premières, dans l'une quelconque des transformations* (α), (β), (γ), (δ), *forment des figures directement ou inversement égales* [2].

Cela établi, abordons le problème posé successivement pour chacune des quatre transformations.

1° *Transformation* (α). — Les considérations les plus simples conduisent immédiatement à la solution : on construit dans le semi-plan (Π_1) le point μ_1, tel que $\mu\mu_1$ soit perpendiculaire à (Π) et (Π_1); puis on construit dans le semi-plan (Π') le point μ', symétrique du point μ_1 par rapport au point ω.

On voit ainsi que, dans le cas de la transforma-

---

[1] Comme il s'agit de figures tracées dans des plans orientés, les mots en italique ont un sens.

[2] Les figures formées par les points de contact sont seulement *semblables,* et non plus égales, si l'on considère les transformations générales dont il est dit un mot à la fin du n° 10.

tion (α), les points μ et μ_1 engendrent des figures *directement égales*.

2° *Transformation* (β). — Construisons la semi-sphère (Σ), tangente à (Π) en μ_1 et tangente à (Π'). Cette semi-sphère se correspond évidemment à elle-même par la transformation (β) [puisque, si elle touche un semi-plan quelconque (Π_1), elle touche aussi le semi-plan réciproque (Π'_1)]. Son point de contact avec (Π') est donc le point μ' cherché.

On voit que le point μ' est la position prise par le point μ lorsqu'on fait tourner le semi-plan (Π) autour de l'arête du dièdre (Π, Π'), de manière à l'amener en coïncidence avec le semi-plan *opposé* à (Π').

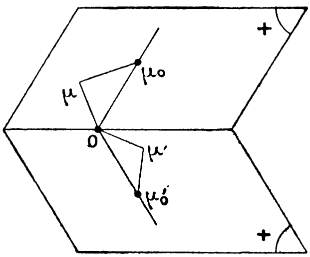
Ainsi, dans le cas de la transformation (β), les figures engendrées par les points μ et μ' sont *inversement égales*.

3° *Transformation* (γ). — Remarquons tout d'abord que, dans le cas de la transformation (γ), les points μ et μ' engendrent des figures *directement* égales. En effet, la nature de l'égalité doit être la même pour tous les couples de semi-plans réciproques, par raison de continuité. Or le semi-plan (Π_1) se correspond à lui-même et, de plus, toute semi-sphère touchant les semi-plans (Π_1) et (Π_2) se correspond aussi à elle-même. Si donc les semi-plans (Π) et (Π') viennent se confondre avec (Π_1), les deux points μ et μ' viennent se confondre en un même point, ce qui exige que l'égalité soit *directe*, en ce qui concerne le couple [(Π_1), (Π_1)], et par conséquent en ce qui concerne un couple quelconque.

Il existe une infinité de semi-sphères qui touchent (Π_1), (Π_2), (Π) et (Π'). Chacune de ces semi-sphères se correspond à elle-même dans la transformation (γ). Si donc le point μ est le point de contact μ_0 avec (Π) de l'une de ces semi-sphères, μ' est le point de contact μ'_0 de la même semi-sphère avec (Π').

Quand on fait varier la semi-sphère en question, les points μ_0 et μ'_0 décrivent respectivement dans les semi-plans (Π) et (Π') des semi-droites Ox et Ox', se coupant sur l'arête du dièdre (Π, Π') et faisant le même angle avec cette arête (*fig.* 1).

Fig. 1.

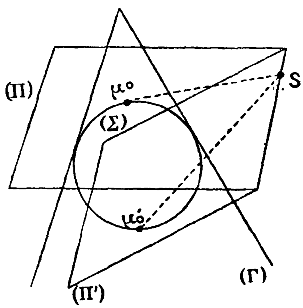


Les points à même distance du point O, sur ces semi-droites, se correspondent entre eux $(O\mu'_0 = O\mu_0)$.

Si maintenant le point de contact de (Π) avec son enveloppe occupe une position quelconque μ, on construira aisément le point μ', tel que le triangle $O\mu'_0\mu'$ soit directement égal au triangle $O\mu_0\mu$.

4° *Transformation* (δ). — Construisons un semi-cône de révolution (Γ') quelconque circonscrit à la semi-sphère (Σ) (*fig.* 2) et ayant son sommet sur la droite D commune à (Π) et à (Π') : ce semi-cône se correspond à lui-même dans la transformation (δ) [car tout semi-plan tangent à (Γ') est transformé en semi-plan jouissant de la même propriété]. Soient S le sommet d'un tel cône, μ_0 et μ'_0 les points de contact avec (Σ) des semi-plans (Π) et (Π'). Les droites $S\mu_0$ et $S\mu'_0$ se correspondent dans les figures engendrées par μ et μ'. On en conclut que la seconde figure s'obtient en faisant

Fig. 2.



tourner le semi-plan (Π') autour de D, de manière à l'amener en coïncidence avec le semi-plan *opposé* à (Π) (1).

Ainsi, dans le cas de la transformation (δ), les points μ et μ' engendrent des figures *inversement égales*.

En terminant, je signalerai encore les faits suivants :

Les transformations (α), (β), (γ), (δ), étant de contact et changeant les sphères en sphères, conservent les lignes de courbure des surfaces. De plus, une sphère *principale,* c'est-à-dire une sphère tangente à une surface et ayant son centre en l'un des centres de courbure principaux de la surface au point de contact, est changée en sphère principale relativement à la surface réciproque de la surface considérée. On a ainsi

(1) C'est exactement la même construction que dans le cas de la transformation (β).

le moyen de déterminer les éléments de la courbure d'une surface, réciproque d'une surface donnée dans l'une quelconque des transformations considérées.