Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 430-432
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__430_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2029.

(1905, p. 576.)

On projette un point M *d'une ellipse en* P *et* Q *sur les diamètres conjugués égaux. Montrer que le milieu* I *de* PQ *est situé sur la normale à l'ellipse en* M, *et que le point de Frégier relatif à* M *est le symétrique de* M *par rapport à* I. (E.-N. BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. LETIERCK.

Prenons pour axes de coordonnées les axes de l'ellipse et soient $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$ les coordonnées de M.

Les équations des diamètres conjugués égaux sont

$$bx - \varepsilon\, ay = 0 \qquad (\text{avec } \varepsilon = \pm 1).$$

Les équations de MP et MQ sont

$$\varepsilon\, ax + by - \varepsilon\, a^2 \cos\varphi - b^2 \sin\varphi = 0.$$

L'équation générale des droites passant par P ou Q est

$$\lambda\,(bx - \varepsilon\, ay) + \varepsilon\, ax + by - \varepsilon\, a^2 \cos\varphi - b^2 \sin\varphi = 0$$

et déterminons λ de façon que cette équation représente la parallèle à MQ menée par P et la parallèle à MP menée par Q. On trouve

$$\lambda = \frac{2\,\varepsilon\, ab}{c^2}$$

et par suite les équations de ces deux parallèles sont comprises dans la formule

$$\varepsilon\, a\left(\frac{a^2+b^2}{c^2}\,x - a\cos\varphi\right) - b\left(\frac{a^2+b^2}{c^2}\,y - b\sin\varphi\right) = 0.$$

Leur point de rencontre a pour coordonnées

$$x = \frac{a\,c^2}{a^2+b^2}\cos\varphi,$$

$$y = \frac{b\,c^2}{a^2+b^2}\sin\varphi.$$

qui sont celles du point de Frégier F relatif à M.

Par suite, le point I, point de rencontre des diagonales du parallélogramme MPFQ, satisfait bien aux conditions de l'énoncé.

Autres solutions par MM. Valère Maës et J. Rose.

2033.

(1906, p. 48.)

Si, dans le triangle sphérique ABC, *l'angle* A *est de grandeur constante, et si l'on a*

$$\frac{\operatorname{tang} AB}{\operatorname{tang} AC} = \text{const.},$$

on a aussi

$$\frac{\cos \widehat{B}}{\cos \widehat{C}} = \text{const.}$$

(R. B.)

SOLUTION

Par UN ABONNÉ.

Écrivons les formules fondamentales

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$
$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B,$$
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C;$$

si l'on porte dans la seconde et dans la troisième l'expression de $\cos a$ fournie par la première, on obtient

$$\cos b \sin c - \cos c \sin b \cos A = \sin a \cos B,$$
$$\cos c \sin b - \cos b \sin c \cos A = \sin a \cos C.$$

On en conclut, en divisant membre à membre,

$$\frac{\operatorname{tang} c - \operatorname{tang} b \cos A}{\operatorname{tang} b - \operatorname{tang} c \cos A} = \frac{\cos B}{\cos C},$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Autres solutions de MM. GUYAU, LETIERCE, J. ROSE, RETALI.