Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 420-426

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__420_1>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Caen.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Déterminer une surface contenant la parabole*

$$x = 0, \qquad y^2 - 4az + 8a^2 = 0$$

et telle que, si l'on projette un de ses points M *en* M′ *sur* OXY, *puis* M′ *en* M″ *sur le plan tangent en* M, *le* z *du point* M″ *soit égal à* a, *quel que soit* M.

II. *Montrer que les normales à la surface* S,

$$x(x^2 + y^2 + z^2) - 2a(x^2 + y^2) = 0,$$

coupent le plan XOY *et le plan* XOZ *en des points dont le lieu, sur chacun des deux plans, est une simple ligne. Partant de là, déterminer, sans intégration, les lignes de courbure de* S.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Montrer* a priori *que, des deux intégrales*

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^s\sqrt{1-x^2}}, \qquad \int_1^\infty \frac{dx}{x^s\sqrt{1-x^2}},$$

une seule a une valeur finie. Calculer cette valeur en passant par l'intégrale indéfinie. (Juillet 1906.)

Grenoble.

EPREUVE THEORIQUE. — 1° *Recherche de la ligne de striction d'une surface réglée dont les génératrices sont normales à une courbe donnée* S.

Cas des normales principales et des binormales.

Si θ *est l'angle de la génératrice* G *qui coupe la courbe* S *en* M *avec la normale principale* MN, *on exprimera en fonction de* θ *et des coordonnées de* M *la distance* V *du point* N *au point central* M_1 *relatif à la génératrice* G.

2° *Déterminer* θ *par la condition que la surface, lieu des normales* G, *soit développable.*

EPREUVE PRATIQUE. — *Étant donnée l'équation*

$$z\sqrt{1+p^2+q^2}=a:$$

1° *Trouver une intégrale complète de cette équation et sa solution singulière;*

2° *Trouver une surface intégrale qui passe par une circonférence donnée, parallèle au plan* xOy, *et ayant son centre sur* Oz;

3° *Interpréter géométriquement les résultats.*

(Juillet 1906.)

Lille.

EPREUVE THÉORIQUE. — PROBLÈME : *Étant donnée la surface représentée par l'équation*

$$(\sigma) \qquad 2az = mx^2+ny^2,$$

où a, m, n *désignent des constantes (axes rectangulaires), calculer le volume limité par cette surface, le plan* xOy *et le cylindre*

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2).$$

Former l'équation différentielle des courbes de la sur-

face (σ) dont les tangentes font avec Oz un angle donné : intégrer cette équation quand n est nul ou égal à m.

QUESTION DE COURS : 1° *Définir une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables :*

$$f(x, y, z, p, q) = 0. \tag{1}$$

2° *Faire voir comment on peut, d'une intégrale complète, déduire* toutes *les intégrales de l'équation* (1).

3° *Démontrer que deux intégrales complètes différentes conduisent à une seule et même solution singulière ; montrer comment cette solution singulière peut être déduite,* a priori, *de l'équation* (1).

4° *Appliquer la méthode de recherche précédente à chacune des deux équations*

$$z^2(1 + p^2 + q^2) = a^2, \tag{2}$$

$$z = px + qy + f(p, q). \tag{3}$$

Montpellier.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Une surface rapportée à des axes rectangulaires a pour équation*

$$z = f(x) + \varphi(y);$$

soient α, β, γ les angles de la normale avec les axes OX, OY, OZ.

1° *Déterminer les fonctions f et φ de façon que les rayons de courbure principaux soient reliés par la relation*

$$(R + R')\cos\gamma = C.$$

2° *Montrer que l'on peut choisir les fonctions f et φ de façon que*

$$(R - R')\cos\gamma \tan\alpha \tan\beta$$

soit en même temps constant.

3° *Déterminer les lignes de courbure de ces dernières surfaces, et les centres de courbure principaux.*

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale*

$$\int_0^\infty \frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\,\frac{\sin ax}{x}\,dx.$$

(Juillet 1906.)

Rennes.

Epreuve théorique. — I. 1° *Calculer, en appliquant le théorème des résidus, l'intégrale*

$$\int_{(C)} \frac{dz}{(z-\alpha)^n(z-\beta)^n},$$

prise dans le sens positif le long d'un cercle (C) *de rayon* 1, *ayant pour centre l'origine ; n désigne un entier positif,* α *et* β *des constantes telles que*

$$|\alpha| < 1 \quad \text{et} \quad |\beta| > 1.$$

2° *On considère les intégrales*

$$\int_{(C)} \frac{dz}{z^2-2iaz+1} \quad \text{et} \quad \int_{(C)} \frac{(z^2+1)\,dz}{(z^2-2iaz+1)^2},$$

où a désigne une constante positive et i le symbole $\sqrt{-1}$, *ces intégrales étant prises dans le sens positif le long d'un cercle de rayon* 1 *ayant pour centre l'origine. Calculer les valeurs de ces intégrales.*

3° *Calculer les intégrales*

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a+i\cos\varphi} \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\,d\varphi}{(a+i\cos\varphi)^2},$$

où a et i ont le même sens que dans la question précédente, en faisant le changement de variable défini par l'égalité

$$e^{i\varphi} = z.$$

II. *Les axes* $Oxyz$ *étant rectangulaires, on considère la courbe* (C) *dont la projection orthogonale sur le plan des* x, y *est la sinusoïde*

$$y = \sin x.$$

1° *Former l'équation différentielle à laquelle doit satisfaire la cote z d'un point quelconque de C, considérée comme fonction de l'abscisse x pour que les normales principales de C soient toutes parallèles au plan de coordonnées Oyz.*

2° *Prouver que, lorsque les normales principales de C sont parallèles au plan des yz, les tangentes font un angle constant avec l'axe des x.*

Ce résultat dépend-il de la forme sinusoïdale donnée pour la projection de C sur le plan des xy ?

3° *La projection de C sur le plan des xy étant la sinusoïde donnée, indiquer la nature de la courbe C sachant que ses tangentes font un angle de 45° avec Ox.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Étant donnés trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz et l'axe Oz étant supposé vertical, on considère la surface (S) définie par l'équation*

$$z = \frac{xy}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2 - y^2},$$

où l'on désigne par a une constante, et où l'on prend la valeur positive du radical; puis le solide (A) limité latéralement par le cylindre

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0,$$

en bas par le plan xOy et en haut par la surface (S).

1° *Calculer le volume du solide (A).*

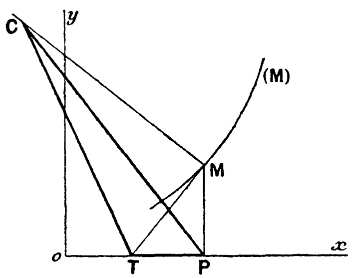
2° *Déterminer le centre de gravité du solide (A) en supposant sa densité constante et égale à ρ.*

Toulouse.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Dans un plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires Ox et Oy, on considère sous le nom de courbes (M) les courbes telles que, si l'on représente par C le centre de courbure d'une telle courbe relatif au point M, par P la projection de M sur Ox et par T le point d'intersection de la tangente en M avec Ox, l'aire du triangle CTP soit constante et égale à trois fois l'aire d'un carré de côté donné $\frac{a}{2}$.*

1° *Exprimer les coordonnées x, y, par rapport à Ox et Oy, d'un point M d'une courbe (M) en fonction du coefficient angulaire t de la tangente en M à cette courbe.*

2° *Déterminer la forme générale des courbes* (M) *qui*



partent de l'origine O *tangentiellement à la droite dont l'équation est*

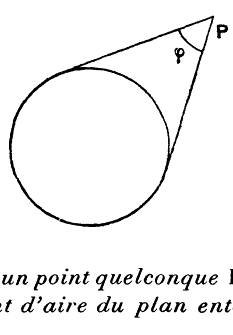
$$y = x.$$

II. *Lignes de courbure de la surface représentée en coordonnées cartésiennes rectangulaires par l'équation*

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c}$$

dans laquelle a, b, c sont trois constantes.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère dans un plan un cercle de rayon donné a. En désignant par φ l'angle des*



tangentes issues d'un point quelconque P *du plan au cercle et par de l'élément d'aire du plan entourant le point* P, *on demande de calculer l'intégrale*

$$S(\varphi - \sin\varphi)\,d\varepsilon$$

étendue à toute la partie du plan extérieure au cercle.

(Juillet 1906.)