NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

C. CLAPIER

Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1906). Solution de la question de mathématiques élémentaires

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 411-420

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__411_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1906, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1906).

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES [1];

PAR M. C. CLAPIER.

I. Nous supposerons que le triangle ABC soit orienté de manière que chacun de ses côtés puisse être envi-

(1) *Voir* l'énoncé, page 406.

sagé comme axe de segment dont le sens positif est le sens de parcours :

$$BC = a, \qquad CA = b, \qquad AB = c, \qquad 2p = a + b + c.$$

Cherchons le lieu S_A correspondant à l'équation

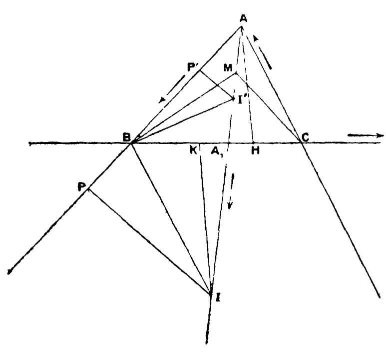
$$b\overline{MB}^2 + c\overline{MC}^2 - a\overline{MA}^2 = abc. \tag{1}$$

Les points du lieu qui sont à une distance donnée R du point A satisfont à la relation

$$b\overline{MB}^2 + c\overline{MC}^2 = a(bc + R^2); \tag{2}$$

d'après le théorème de Stévin, ces points sont situés sur une circonférence dont le centre A_1, déterminé par la condition $\frac{A_1B}{A_1C} = -\frac{c}{b}$, est précisément le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$ du triangle.

Fig. 1.



Son rayon s'obtiendra en déterminant les points M situés sur le diamètre BC; il suffit de substituer dans l'expression (2)

$$MB = A_1B - A_1M,$$
$$MC = A_1C - A_1M;$$

et, en tenant compte des valeurs de

$$A_1B = \frac{-ac}{b+c}, \qquad A_1C = \frac{ab}{b+c},$$

il vient

$$(b+c)\overline{A_1M}^2 = aR^2 + abc\frac{b+c-a}{b+c}.$$

Si nous prenons le point M à l'intersection de la circonférence dont le rayon est donné par l'égalité précédente et de la circonférence de centre A et de rayon R, nous voyons que le lieu cherché S_A peut être déterminé par la relation

$$(3) \qquad (b+c)\overline{MA_1}^2 - a\overline{MA}^2 = abc\,\frac{b+c-a}{b+c}.$$

Le théorème de Stévin nous montre que S_A est une circonférence dont le centre I, situé sur la bissectrice AA_1, est fixé par la condition $\frac{IA_1}{IA} = \frac{a}{b+c}$.

Or, si l'on désigne par r le rayon du cercle exinscrit relatif à l'angle A, par h la hauteur correspondante, nous avons

$$\frac{IA_1}{IA} = \frac{r}{r+h};$$

d'autre part, la surface du triangle ABC a pour expression

$$\frac{ah}{2} = (p-a)\,r = \frac{b+c-a}{2}\,r,$$

et l'on déduit

$$\frac{r}{r+h} = \frac{a}{b+c}.$$

Donc, le point I coïncide avec le centre du cercle exinscrit envisagé.

Si dans l'équation (2) nous remplaçons R^2 par

$-R^2$, nous serons conduits aux deux relations équivalentes :

$$b\overline{MB}^2 + c\overline{MC}^2 + a\overline{MA}^2 = abc,$$

$$(b+c)\overline{MA_1}^2 + a\overline{MA}^2 = abc\frac{b+c-a}{b+c},$$

le lieu correspondant est un cercle S', dont le centre I' est tel que l'on a

$$\frac{I'A_1}{I'A} = -\frac{IA_1}{IA}.$$

Les quatre points A, A_1, I', I sont conjugués harmoniques et le point I' est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.

En résumé, si l'on prend dans les équations (1) les combinaisons de signes $\begin{smallmatrix}+ + +\\ - + +\end{smallmatrix}$, on obtient comme lieux du point M deux cercles S' et S_A concentriques respectivement aux cercles inscrits dans l'angle A du triangle donné.

Les deux combinaisons de signes $\begin{smallmatrix}+ - +\\ + + -\end{smallmatrix}$ donnent des cercles S_B et S_C concentriques aux deux autres cercles exinscrits du triangle.

Les quatre autres combinaisons de signes résultent des précédentes en donnant au second membre des équations (1) une valeur négative; les lieux correspondants n'ont aucun point réel.

Remarque. — La relation (3) devient identique lorsque $b + c = a$, c'est-à-dire lorsque les trois points A, B, C sont en ligne droite.

Dans ce cas, quel que soit le point M de l'espace, on a l'identité de Stewart,

$$b\overline{MB}^2 + c\overline{MC}^2 - a\overline{MA}^2 = abc.$$

Il est clair que tous les points de l'espace situés sur la sphère qui passe par le grand cercle S_A satisfont à l'équation (3) et par suite à l'équation (1) équivalente.

II. Pour déterminer le rayon ρ_A de la circonférence S_A nous allons chercher les points de ce lieu situés sur la bissectrice AI (*fig.* 1).

Les deux triangles AMB, AMC nous donnent les relations

$$\overline{MB}^2 = \overline{MA}^2 + c^2 - 2c\overline{MA}\cos\frac{A}{2},$$

$$\overline{MC}^2 = \overline{MA}^2 + b^2 - 2b\overline{MA}\cos\frac{A}{2},$$

d'où

$$b\overline{MB}^2 + c\overline{MC}^2 = (\overline{MA}^2 + bc)(b + c) - 4bc\overline{MA}\cos\frac{A}{2},$$

et, comme le premier membre a pour valeur

$$a\overline{MA}^2 + abc,$$

nous avons l'équation

$$\overline{MA}^2 - 2\frac{bc\cos\frac{A}{2}}{p-a}\overline{MA} + bc = 0,$$

qui détermine les points cherchés M et M'

Les segments AM et AM' situés sur le diamètre AI de la circonférence S_A vérifient les relations

$$AM.AM' = bc,$$

$$\frac{AM + AM'}{2} = AI = \frac{p}{\cos\frac{A}{2}}$$

La première nous donne la puissance du point A et la seconde nous donne la position déjà trouvée du centre de la circonférence S_A.

On peut en déduire le rayon

$$\rho_A^2 = \left(\frac{AM' - AM}{2}\right)^2 = \frac{p^2 - bc\cos^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}},$$

et, substituant à $\cos^2\frac{A}{2}$ sa valeur $\frac{p(p-a)}{bc}$, il vient

$$(4) \qquad \rho_A^2 = \frac{abc}{p-a}.$$

Supposons que le triangle ABC se déplace de manière à rester circonscrit à un cercle de rayon r' et inscrit dans un autre de rayon R; je dis que, dans ce cas, il est possible d'exprimer la somme

$$\frac{1}{\rho_A^2} + \frac{1}{\rho_B^2} + \frac{1}{\rho_C^2}$$

à l'aide de R et r'.

En effet,

$$\frac{1}{\rho_A^2} = \frac{p-a}{abc}, \qquad \frac{1}{\rho_B^2} = \frac{p-b}{abc}, \qquad \frac{1}{\rho_C^2} = \frac{p-c}{abc};$$

la surface du triangle est

$$\frac{abc}{4R} = pr',$$

donc

$$\frac{1}{\rho_A^2} + \frac{1}{\rho_B^2} + \frac{1}{\rho_C^2} = \frac{p}{abc} = \frac{1}{4Rr'}.$$

III. Nous avons trouvé que la puissance du sommet A par rapport au cercle S_A était positive et égale à bc; cela nous permet de construire ce cercle.

On peut remarquer que, si l'on désigne par I, I', I'', I''' les centres des cercles inscrits au triangle ABC, on a les égalités

$$AI' . AI = bc.$$
$$AI'' . AI''' = - bc$$

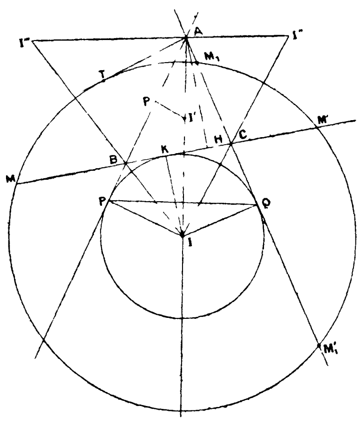
et

$$\overline{AT}^2 = bc,$$

AT étant la distance du point A au cercle S_A.

Les puissances des deux autres sommets B et C se

Fig. 2.



calculent de la même manière; elles sont négatives et ont pour valeurs absolues respectives ca et ab.

La puissance du centre I' est

$$\rho_A^2 - \overline{II'}^2 = \frac{abc}{p-a} - \frac{a^2}{\cos^2\frac{A}{2}} = \frac{abc}{p}$$

et l'on trouve de même, pour la puissance des centres I'' et I''', les valeurs respectives

$$\frac{c^2}{\cos^2\frac{C}{2}} - \rho_A^2 \quad \text{et} \quad \frac{b^2}{\cos^2\frac{B}{2}} - \rho_A^2,$$

qu'il est facile d'exprimer à l'aide de a, b, c.

Les points d'intersection M et M' du côté BC du triangle avec la circonférence S_A sont déterminés par les deux relations

$$\begin{aligned} BM.BM' &= - ca, \\ BK &= p - c, \end{aligned}$$

K étant le milieu de $\overline{MM'}$; l'équation qui détermine les points M_1 d'intersection des côtés AC ou AB est

$$\overline{AM_1}^2 - 2p.AM_1 + bc = 0.$$

IV. Le rapport

$$\frac{BM.BM'}{CM.CM'} = \frac{ca}{ab} = \frac{c}{b}.$$

Si, les points B et C restant fixes, le rapport $\frac{AB}{AC}$ demeure invariable, les points M et M' satisfont à la relation

$$\frac{(BM - a)(BM' - a)}{BM.BM'} = \frac{b}{c} = \text{const.}$$

Ils décrivent sur BC deux divisions homographiques en involution dont les points doubles sont donnés par l'équation

$$\overline{BN}^2\left(1 - \frac{b}{c}\right) - 2a.BN + a^2 = 0.$$

Donc le cercle S_A coupe orthogonalement la circonférence décrite sur ces points doubles N et N' comme diamètre.

V. On donne le cercle S_A dont le rayon ρ est donné par l'expression (4)

$$\rho^2 = \frac{abc}{p - a}.$$

La corde MM′ est supposée fixe et se trouve à la distance $IK = r$ du centre I; cherchons comment se déplace le sommet A du triangle ABC, dont les côtés AB et AC restent tangents au cercle exinscrit (*fig.* 2).

D'abord le rayon R du cercle circonscrit au triangle variable reste constant; nous avons, en effet, les trois expressions équivalentes de la surface,

$$\frac{ah}{2} = (p - a)r = \frac{abc}{4R},$$

d'où l'on déduit

$$(5) \qquad h = \frac{bc}{2R}, \qquad R = \frac{\rho^2}{4r}.$$

La première de ces relations peut s'écrire

$$\frac{\overline{AT}^2}{AH} = 2R = \text{const.}$$

et, d'après un théorème de Chasles (*Géométrie supérieure*), le lieu du point A est une circonférence T qui passe par les points M et M′.

La droite BC est l'axe radical des deux cercles S_A et T.

La droite PQ qui joint les points de contact des côtés AB et AC avec le cercle exinscrit est la polaire du point A par rapport à ce cercle; son enveloppe est la polaire réciproque de la circonférence T, relative au cercle précédent; c'est une conique admettant pour foyer le point I et pour axe la perpendiculaire IK qui est la ligne de symétrie des trois cercles.

Remarque. — Si l'on désigne par d la distance du centre I du cercle exinscrit au centre C du cercle circonscrit au triangle, nous savons que l'on a

$$d^2 = R^2 + 2Rr.$$

Le point C décrit donc une circonférence de centre I et le cercle circonscrit au triangle ABC enveloppe deux circonférences concentriques.

VI. Nous avons déjà remarqué que l'équation (3) était satisfaite pour tous les points de la sphère obtenue en faisant tourner la circonférence S_A autour du diamètre AA_1. Le lieu demandé est donc la sphère qui passe par le cercle correspondant.