JEAN SERVAIS

Concours d'admission à l'École normale supérieure en 1906. Deuxième composition de mathématiques (Sciences I et II)

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 370-376

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__370_0>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1906.

Déuxième composition de Mathématiques (Sciences I et II).

SOLUTION PAR M. JEAN SERVAIS.

En supposant l'espace rapporté à un système de coordonnées rectangulaires OX, OY, OZ, *on considère la courbe définie par les équations*

$$y = 2x^3, \qquad z = x^4.$$

I. *Montrer que l'arc de cette courbe, compté à partir de l'origine des coordonnées jusqu'au point dont l'abscisse est le nombre positif* x, *est compris entre* $x + \frac{18}{5}x^5$ *et* $x + \frac{18}{5}x^5 + \frac{8}{7}x^7$ *pour les valeurs suffisamment petites de* x ; *on prouvera que cet arc est toujours inférieur à la seconde limite, et qu'il est certainement supérieur à la première pour* $0 < x < \frac{2}{9}$.

II. *Montrer qu'il existe sur cette courbe une infinité de couples de points* A, B *tels que les plans* (P), (Q) *respectivement osculateurs à la courbe en* A, B *se coupent suivant la droite qui joint ces deux points.*

Soit V *l'angle (moindre que deux droits) des directions, perpendiculaires aux plans* (P), (Q), *qui font des angles aigus avec la direction positive sur l'axe des* z ; *comment varie cet angle quand l'abscisse* x *du point* A *croît de* 0 *à* $+\infty$?

Calculer, à un demi-millième près, la valeur de x pour laquelle l'angle V *est droit.*

Montrer que les droites AB *qui joignent deux points d'un même couple sont situées sur la surface dont l'équation est*

$$Z = \frac{Y^2}{4X^2}.$$

Séparer cette surface en régions d'après le nombre de plans osculateurs à la courbe proposée qui passent par ses différents points.

III. *Évaluer l'intégrale définie*

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \operatorname{tang} \frac{V}{2}\, dx,$$

où V *est la fonction de x qui a été définie plus haut.*

I. L'arc de la courbe est donné par la formule

$$ds^2 = (1 + 36x^4 + 16x^6)\, dx^2.$$

En extrayant la racine carrée du polynome entre parenthèses, on trouve les identités :

$$(1) \qquad 1 + 36x^4 + 16x^6 = (1 + 18x^4)^2 + 4x^6(4 - 81x^2)$$

et

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & 1 + 36x^4 + 16x^6 \\ & \quad = (1 + 18x^4 + 8x^6)^2 - x^8(324 + 288x^2 + 64x^4). \end{aligned} \right.$$

L'identité (1) prouve que, lorsque

$$4 - 81x^2 > 0,$$

c'est-à-dire, lorsque (x positif)

$$x < \frac{2}{9},$$

on a

$$\frac{ds^2}{dx^2} > (1 + 18x^4)^2.$$

L'identité (2) montre que, quel que soit x, on a toujours

$$\frac{ds^2}{dx^2} < (1 + 18x^4 + 8x^6)^2;$$

on en conclut $\left(x < \frac{2}{9}\right)$,

$$1 + 18x^4 < \frac{ds}{dx} < 1 + 18x^4 + 8x^6$$

et, en intégrant de 0 à x,

$$x + \frac{18}{5}x^5 < s < x + \frac{18}{5}x^5 + \frac{8}{7}x^7.$$

II. L'équation du plan osculateur, en un point A de la courbe d'abscisse x, est

$$2x^3X - xY + Z - x^4 = 0.$$

Écrivons qu'il passe par le point B de la courbe d'abscisse x' et nous obtenons la condition

(3) $$2x^3x' - 2xx'^3 + x'^4 - x^4 = 0.$$

Cette condition étant symétrique en x et x', prouve que, si le plan osculateur de A passe en B, réciproquement le plan osculateur de B passe en A. Les deux plans osculateurs se coupent donc suivant AB.

La relation (3) s'écrit

$$(x' - x)^3(x' + x) = 0$$

et, par suite, puisque $x' \neq x$, elle donne

$$x' = -x;$$

on en conclut

$$y' = -y, \qquad z' = z.$$

Les points A et B sont symétriques par rapport à Oz.

Les cosinus directeurs de la perpendiculaire au plan osculateur, A, en faisant avec Oz un angle aigu sont :

$$\frac{2x^3}{\sqrt{4x^6+x^2+1}}, \qquad \frac{-x}{\sqrt{4x^6+x^2+1}}; \qquad \frac{1}{\sqrt{4x^6+x^2+1}}.$$

Ceux de la perpendiculaire au plan osculateur B s'obtiennent en remplaçant x par $-x$.
On en conclut

$$\cos V = \frac{1-x^2-4x^6}{1+x^2+4x^6}.$$

Si l'on pose

$$u = x^2+4x^6,$$

on a

$$\cos V = \frac{1-u}{1+u}.$$

Quand x croît de 0 à $+\infty$, u croît évidemment de 0 à $+\infty$ et $\cos V$ décroît de 1 à -1. L'angle V croît donc de 0 à π.

La valeur de x pour laquelle V est droit est racine de l'équation

$$4x^6+x^2-1=0.$$

Cette équation a une racine positive et une seule comprise entre 0 et 1.

En appliquant trois fois la méthode d'approximation de Newton, en partant de la valeur 1, on trouve

$$x = 0,7073.$$

Les équations de la droite AB sont

$$(4) \qquad Y = 2x^2X, \qquad Z = x^4.$$

Quand x varie, la droite AB engendre un conoïde dont on obtient l'équation en éliminant x entre les deux précédentes, ce qui donne bien

$$Z = \frac{Y^2}{4X^2}.$$

Écrivons que le plan osculateur en A passe par un point donné X, Y, Z de cette surface, nous obtenons l'équation du quatrième degré en x :

$$(5) \qquad 4X^2x^4 - 8X^3x^3 + 4X^2Yx - Y^2 = 0.$$

Cette équation admet évidemment pour racines les abscisses des points A et B de rencontre de la génératrice passant par le point X, Y, Z avec la courbe.

Ces abscisses sont données par la première des équations (4) :

$$(6) \qquad x^2 = \frac{Y}{2X}.$$

L'équation (5) se décompose alors ainsi

$$(2Xx^2 - 4X^2x + Y)(2Xx^2 - Y) = 0.$$

Les quatre racines sont donc : 1° celles qui sont fournies par (6) ; 2° celles qui sont racines de l'équation

$$(7) \qquad 2Xx^2 - 4X^2x + Y = 0.$$

Les deux racines de l'équation (6) sont réelles lorsque

$$XY > 0,$$

ce qui était à prévoir puisque cela a lieu pour tout point de la courbe donnée.

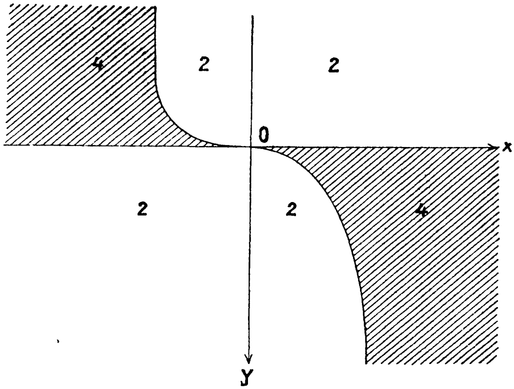
Les deux racines de l'équation (7) sont réelles lorsque

$$X(2X^3 - Y) > 0.$$

Construisons la parabole cubique

$$Y = 2X^3$$

dans le plan des xy. La figure ci-contre montre que,



par les points de la surface qui se projettent dans la région ombrée, passent *quatre* plans osculateurs réels et ailleurs *deux* plans. Or, la parabole cubique est la projection horizontale de la courbe donnée, et Ox est une génératrice de la surface. Par suite, par tous les points de la surface compris entre Ox et la courbe donnée passent *quatre* plans osculateurs et par tout autre point *deux* tels plans.

III. De la formule qui donne $\cos V$, on tire

$$u = \frac{1 - \cos V}{1 + \cos V} = \operatorname{tang}^2 \frac{V}{2},$$

d'où

$$\operatorname{tang} \frac{V}{2} = \sqrt{u} = \sqrt{4x^4 + 1}\, x.$$

On a donc

$$J = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \operatorname{tang} \frac{V}{2}\, dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{4x^4 + 1}\, x\, dx.$$

Changeons de variable en posant $x^2 = z$,

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{4z^2+1}\,dz.$$

Cette intégrale bien connue (arc de parabole) donne

$$J = \left[\tfrac{1}{4} z \sqrt{4z^2+1} + \tfrac{1}{8}\,L\left(2z + \sqrt{4z^2+1}\right)\right]_0^{\frac{1}{2}},$$

$$J = \frac{\sqrt{2}}{8} + \tfrac{1}{8}\,L\left(1+\sqrt{2}\right).$$