STUYVAERT

Un théorème sur la collinéation et la réciprocité

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 348-355

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__348_1>

[P1f]

UN THÉORÈME SUR LA COLLINÉATION ET LA RÉCIPROCITÉ;

PAR M. STUYVAERT.

Le point de départ de ce travail est un théorème que nous appellerons *théorème de Reye* et dont voici l'énoncé :

Toutes les cubiques gauches passant par cinq points percent un plan fixe en des ternes de points qui sont les sommets de triangles conjugués par rapport à une même conique. (*Zeitschr. f. Math. u. Phys.*, t. XIII.)

Cette propriété a été démontrée trop souvent pour qu'une nouvelle méthode de l'établir présente encore quelque intérêt en elle-même. Mais on peut analyser les relations du *théorème de Reye* avec des théories apparentées; ces recherches, poussées dans deux directions différentes, nous ont donné des résultats.

En considérant la gerbe de cubiques par cinq points comme un cas particulier de systèmes plus généraux, nous avons montré (*Comptes rendus*, novembre 1905) comment les caractères spécifiques de cette gerbe entraînent le *théorème de Reye*.

Ici, au contraire, nous allons regarder cette proposition comme un analogue supérieur du *théorème de C. Sturm* sur les faisceaux de coniques, et nous étendons à l'espace une méthode qui réussit dans le plan.

1. Le *théorème de C. Sturm* peut se déduire de celui de *Desargues*. Ce dernier repose à son tour sur la propriété suivante :

Si x *et* X, y *et* Y *sont deux couples d'éléments homologues de deux formes projectives superposées du premier ordre* (*ponctuelles ou faisceaux*), *les couples* (x, Y), (y, X) *et les éléments doubles de la projectivité sont en involution.*

Cherchons l'analogue de ce théorème dans un espace à deux, trois ou même plusieurs dimensions. Pour la facilité du langage, bornons-nous à l'espace ordinaire : nous aurons à démontrer le théorème que voici :

Si le point Y *et le plan* U *sont respectivement les homologues du point* y *et du plan* u *dans deux espaces collinéaires* (*le déterminant de la collinéation étant différent de zéro*), Y *est le pôle de* u *et* y *le pôle de* U *dans un système polaire ayant pour tétraèdre conjugué le tétraèdre fondamental de la collinéation.*

M. C. Servais nous a communiqué verbalement une démonstration synthétique de cette propriété. Celle que nous donnons ici est analytique ; nous n'avons donc pas à nous occuper du cas des imaginaires.

Prenons les points doubles, supposés distincts, de la collinéation pour sommets du tétraèdre de référence. Les formules de la projectivité peuvent alors s'écrire

$$\rho Y_i = \alpha_i y_i (i = 1, 2, 3, 4).$$

Un plan $U \equiv \Sigma U_i X_i$ répond à un plan $u \equiv \Sigma U \alpha_i x_i$, que l'on peut désigner par $\Sigma u_i x_i$; on a alors

$$\sigma u_i = \alpha_i U_i.$$

Or, dans un système polaire où le tétraèdre de référence est un tétraèdre conjugué et où le point y est le pôle du plan U, on a des relations de la forme

$$\rho' y_i = \beta_i U_i;$$

par suite aussi

$$\rho' \alpha_i y_i = \alpha_i \beta_i U_i,$$

ou, d'après les formules précédentes,

$$\rho\rho' Y_i = \sigma \beta_i u_i;$$

dans ce système polaire, le point Y est donc bien le pôle du plan u.

Le raisonnement, fait en sens inverse, démontre la réciproque :

Si les points Y *et* y *sont respectivement les pôles des plans* u *et* U *par rapport à un système polaire, le point* Y *et le plan* U *sont respectivement les homologues du point* y *et du point* u *dans une collinéation ayant pour tétraèdre fondamental un tétraèdre polaire quelconque du système proposé.*

2. La démonstration précédente suppose que les points doubles de la collinéation soient distincts. Le raisonnement qui va suivre établit le même théorème dans tous les cas.

Écrivons les équations de la collinéation sous la forme

$$\rho Y_i = \sum_{j=1}^{j=4} a_{ij} y_j \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

En général a_{ij} diffère de a_{ji}, et la seule restriction à faire est que le déterminant des quantités a_{ij} ne soit pas nul.

Le plan $U \equiv \Sigma U_i X_i$ répond au plan $u \equiv \Sigma U_i \Sigma a_{ij} x_j$ et, si l'on désigne ce dernier par $\Sigma u_j x_j$, on a

$$\sigma u_j = \sum_{i=1}^{i=4} a_{ij} U_i.$$

Soient f_{ik} les coefficients réels d'une quadrique f réelle ou imaginaire; on a donc $f_{ik} = f_{ki}$. Si U est le plan polaire du point y par rapport à cette quadrique, on a

$$\tau U_i = \sum_{k=1}^{k=4} f_{ik} y_k,$$

d'où

$$\sigma\tau u_j = \sum_{i=1}^{i=4} a_{ij} \sum_{k=1}^{k=4} f_{ik} y_k.$$

Si le plan u est le plan polaire du point Y par rapport à la même quadrique, on a de même

$$\nu u_j = \sum_{i=1}^{i=4} f_{ij} Y_i,$$

d'où

$$\rho\nu u_j = \sum_{i=1}^{i=4} f_{ij} \sum_{k=1}^{k=4} a_{ik} y_k.$$

Les deux systèmes de valeurs trouvés pour les quantités u_j ne peuvent coexister, en général, que pour un nombre fini de points y (ce nombre est 4). Mais elles sont compatibles, quel que soit le point y, si l'on a

$$\sum_{i=1}^{i=4} a_{ij} f_{ik} = \sum_{i=1}^{i=4} f_{ij} a_{ik} \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4).$$

Ces conditions sont vérifiées identiquement, si l'on a $j = k$. De plus, les égalités demeurent inaltérées, si l'on permute j et k. On ne doit considérer que les cas où j par exemple est supérieur à k et, comme les nombres 1, 2, 3, 4 présentent six combinaisons, les relations précédentes sont au nombre de six entre les dix coefficients homogènes f_{ik}; il y a donc, en général, ∞^3 quadriques satisfaisant à la condition d'avoir pour plans polaires de deux points homologues quelconques y et Y deux plans homologues aussi, mais en ordre inverse, U et u.

Démontrons que tout point double de la collinéation est le pôle d'un plan double par rapport à chacune de ces quadriques. Si un point z est double, il existe une valeur de ρ telle que l'on ait

$$\rho z_i = \sum_{j=1}^{j=4} a_{ij} z_j;$$

soit v le plan polaire de z par rapport à une des ∞^3 quadriques trouvées, on a alors

$$\tau v_k = \sum_{i=1}^{i=4} f_{ik} z_i,$$

donc

$$\rho\tau v_k = \sum_{i=1}^{i=4} f_{ik} \sum_{j=1}^{j=4} a_{ij} z_j;$$

mais, à cause des conditions imposées aux quadriques f

et écrites plus haut, ces relations deviennent

$$\rho\tau v_k = \sum_{i=1}^{i=4} a_{ik} \sum_{j=1}^{j=4} f_{ij} z_j$$

et, puisque v est le plan polaire de z, on a enfin

$$\rho\tau v_k = \tau \sum_{i=1}^{i=4} a_{ik} v_i ;$$

ceci exprime que v est un plan double, donné d'ailleurs par la même valeur de ρ qui a fourni le point double z. Ainsi, tout point double de la collinéation est le pôle d'un plan double par rapport à chacune des ∞^3 quadriques f. Il est visible que l'une de ces surfaces est déterminée, en général, par la condition que y est le pôle de U.

3. Voici, en passant, une application. Supposons le complexe tétraédral défini par deux espaces collinéaires (voir Reye, *Géométrie de position*). Soient a et b deux rayons du complexe; a passe par deux points homologues y et Y; b est l'intersection de deux plans homologues u et U. D'après le théorème du n° 1, y est le pôle de U et Y le pôle de u par rapport à une quadrique ayant pour tétraèdre conjugué le tétraèdre fondamental de la projectivité; donc a et b sont deux droites conjuguées par rapport à cette quadrique. Les droites conjuguées du rayon a par rapport aux ∞^3 quadriques f ayant le tétraèdre fondamental pour tétraèdre polaire sont toutes des rayons du complexe. Ou encore le complexe est conjugué à lui-même par rapport à chacune de ces quadriques. (Ces propriétés sont connues.)

4. Les nos 1 et 2 sont indépendants du nombre de variables. Dans un plan, par exemple, on a la propriété suivante :

Si y et Y sont deux points homologues, u et U deux droites homologues de deux systèmes plans collinéaires superposés, y est le pôle de U et Y celui de u dans un système polaire ayant pour triangle conjugué le triangle fondamental de la collinéation. Et réciproquement.

Cette proposition conduit au *théorème de Reye* sur les cubiques gauches.

En effet, les rayons qui projettent les points d'une cubique gauche de deux d'entre eux, G et H par exemple, forment deux gerbes collinéaires et marquent, sur un plan μ, deux systèmes plans projectifs dont les points doubles sont les traces A, B, C de la cubique sur le plan μ.

Soient D, E, F trois points de la courbe; appelons D', E', F' les traces respectives de GD, GE, GF sur le plan μ et D'', E'', F'' celles de HD, HE, HF.

D'après le théorème qui vient d'être énoncé, D' et D'' sont respectivement les pôles de $E''F''$ et $E'F'$ par rapport à une conique admettant le triangle ABC comme triangle conjugué.

Si l'on intervertit les rôles des points G et D, on voit que, dans la même conique, définie par son triangle conjugué ABC et par la condition que D' est le pôle de $E''F''$, on a maintenant la trace I de GH pour pôle de la droite d intersection des plans DEF et μ. Par interversion successive des points D, E, F, G, H entre eux, on reconnaît ainsi que le plan μ coupe chaque face du pentaèdre DEFGH suivant une droite et chaque arête opposée en un point et que ces dix droites sont les polaires respectives de ces dix points par rapport à une même conique qui admet ABC comme triangle conjugué.

Cette propriété est l'analogue du *théorème de Desargues* relatif aux coniques; elle est connue ainsi que les cas particuliers que l'on peut en tirer lorsque certains sommets du pentaèdre coïncident.

L'analogue du *théorème de C. Sturm* en résulte immédiatement : toutes les cubiques gauches passant par les cinq points D, E, F, G, H percent le plan μ en des ternes de points A, B, C formant des triangles conjugués par rapport à une même conique; celle-ci est en effet complètement déterminée par le pentaèdre DEFGH.