Nouvelles annales de mathématiques

F. Gomes Teixeira

Sur une propriété de la strophoïde et sur les cubiques qui coïncident avec leurs cissoïdales

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 337-343

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__337_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1906, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

[$M^1 5 c\alpha$]

SUR UNE PROPRIÉTÉ DE LA STROPHOÏDE ET SUR LES CUBIQUES QUI COINCIDENT AVEC LEURS CISSOÏDALES ;

PAR M. F. GOMES TEIXEIRA.

Nous allons donner, dans la première partie de ce travail, une propriété de la strophoïde qui nous paraît intéressante et qui n'a pas été encore remarquée, croyons-nous. Ensuite, en généralisant le résultat obtenu, nous chercherons les cubiques qui coïncident avec les cissoïdales d'elles-mêmes et d'une droite ou d'une circonférence.

I.

Rappelons d'abord un théorème de M. de Longchamps dont nous ferons usage. Ce théorème a été obtenu par une voie purement géométrique par ce savant géomètre; mais on peut le démontrer aussi clairement par l'analyse, comme on va voir.

Considérons une courbe quelconque C, *une droite* D *et un point* O, *non situé sur cette droite, et menons par* O *une autre droite arbitraire* D_1. *Soient* R *et* S *les points où* D_1 *coupe la courbe et la droite* D, *respectivement;* ρ_1 *et* ρ_2 *les vecteurs de ces points, rapportés à l'origine* O, *et* M *un point de* D_1 *dont le vecteur* ρ *soit égal à la différence* $\rho_2 - \rho_1$. *Le lieu des positions que* M *prend quand* D_1 *varie, en passant toujours par* O, *est une courbe nommée, comme on sait,* cissoïdale *de la courbe* C *et de la droite* D *par rapport au point* O, *que nous nommerons* pôle.

Cela posé, prenons pour origine des coordonnées le point O, et pour axe des abscisses la perpendiculaire à D qui passe par ce point, et représentons par θ l'angle formé par D_1 avec cet axe, par (x, y) les coordonnées de M, par (x_1, y_1) les coordonnées de R et par a la distance de O à la droite D. On a alors

$$x = a - \rho_1 \cos\theta, \qquad y = a \operatorname{tang}\theta - \rho_1 \sin\theta,$$
$$x_1 = \rho_1 \cos\theta, \qquad y_1 = \rho_1 \sin\theta;$$

et par conséquent les équations de la tangente à la cissoïdale au point M et de la tangente à la courbe C au point R sont les suivantes :

$$(\rho_1 \sin\theta - \rho'_1 \cos\theta)y + \left(\rho'_1 \sin\theta + \rho_1 \cos\theta - \frac{a}{\cos^2\theta}\right)x$$
$$= \frac{2a\rho_1}{\cos\theta} - \rho_1^2 - \frac{a^2}{\cos^2\theta},$$
$$(\rho'_1 \cos\theta - \rho_1 \sin\theta)y - (\rho_1 \cos\theta + \rho'_1 \sin\theta)x = -\rho_1^2,$$

où ρ'_1 représente la dérivée de ρ_1 par rapport à θ.

On voit, au moyen de ces équations, que les coordonnées y_1 et y_2 des points où ces tangentes coupent la droite D sont déterminées par les équations

$$y_1 = \frac{2a\rho_1 - \rho_1^2 \cos\theta - a\cos\theta(\rho'_1 \sin\theta + \rho_1 \cos\theta)}{(\rho_1 \sin\theta - \rho'_1 \cos\theta)\cos\theta},$$
$$y_2 = \frac{\rho_1^2 - a(\rho_1 \cos\theta + \rho'_1 \sin\theta)}{\rho_1 \sin\theta - \rho'_1 \cos\theta}.$$

On a aussi, en représentant par y_3 l'ordonnée du point où la droite D_1 coupe D,

$$y_3 = a \operatorname{tang}\theta.$$

Il résulte de ces équations l'identité

$$y_1 - y_2 = 2(y_3 - y_2),$$

au moyen de laquelle on voit que *la droite qui passe par* O *et par le point* (x, y) *de la cissoïdale coupe la droite donnée* D *en un point équidistant de ceux où elle est coupée par la tangente à la cissoïdale au point* (x, y) *et par la tangente à la courbe* C *au point* (x_1, y_1),

Ce théorème est celui que nous nous proposions de démontrer analytiquement. Il a été communiqué en 1885 par M. de Longchamps à l'Association française pour l'avancement des sciences, au Congrès de Grenoble.

II.

Appliquons maintenant ce théorème à la strophoïde.

Considérons une droite L, et deux points A et B, dont le premier soit situé sur cette droite. Si par le point B on mène des droites qui coupent L, et si l'on prend sur chacune, à partir du point K d'intersection, deux segments KM et KM_1 tels qu'on ait

$$KM = KM_1 = KA,$$

le lieu des points M et M_1 qu'on obtient est, comme on sait bien, une strophoïde ([1]). On sait aussi que la distance du point B à la droite L est égale à la distance de L à l'asymptote réelle, laquelle est parallèle à L. On a donc, en représentant par H le point d'intersection de la droite MM_1 avec cette asymptote,

$$BM + BM_1 = 2BK = BH.$$

On voit au moyen de cette relation qu'une partie de

([1]) On peut voir la théorie de cette cubique dans notre *Tratados de las curvas especiales notables*, ouvrage couronné et publié par l'Académie des Sciences de Madrid (Madrid, 1906, p. 16).

la cubique considérée est la cissoïdale de l'autre partie et de l'asymptote, et que, par conséquent, *les tangentes à la strophoïde aux points* M *et* M_1 *coupent l'asymptote en deux points équidistants de celui où elle est coupée par la droite* BK.

Ce théorème est celui que nous nous proposions d'établir : il en résulte les corollaires suivants :

1° *La tangente à la strophoïde au point* B *passe par le point où cette cubique coupe son asymptote réelle.*

2° *Les deux points de la strophoïde où la tangente est parallèle à l'asymptote réelle sont situés sur une droite qui passe par* B.

III.

La strophoïde n'est pas la seule cubique qui jouisse de la propriété de coïncider avec une cissoïdale d'elle-même et d'une droite par rapport à un point de la cubique. Nous allons chercher les cubiques qui satisfont à cette condition.

Prenons pour origine des coordonnées le pôle de la cissoïdale et pour une des coordonnées une parallèle à la droite donnée, et considérons l'équation générale des cubiques :

$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fxy + Gy^2 + Hx + Ky = 0$$

ou, en posant

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta,$$

pour la rapporter aux coordonnées polaires,

$$\begin{aligned}(A\cos^3\theta + B\cos^2\theta\sin\theta + C\cos\theta\sin^2\theta + D\sin^3\theta)\,\rho^2\\ + (E\cos^2\theta + F\cos\theta\sin\theta + G\sin^2\theta)\,\rho + H\cos\theta + K\sin\theta = 0.\end{aligned}$$

En représentant par ρ_1 et ρ_2 les racines de cette équation, on a

$$\rho_1+\rho_2=-\frac{E\cos^2\theta+F\cos^2\theta\sin\theta+G\sin^2\theta}{A\cos^3\theta+B\cos^2\theta\sin\theta+C\cos\theta\sin^2\theta+D\sin^3\theta}.$$

Supposons maintenant que l'équation de la droite donnée soit $x=a$, ou en coordonnées polaires

$$\rho'=\frac{2}{\cos\theta}.$$

La condition pour que la cubique coïncide avec la cissoïdale d'elle-même et de cette droite, c'est qu'on ait identiquement

$$\rho_1+\rho_2=\rho',$$

ou, par conséquent,

$$\begin{aligned}&E+F\tang\theta+G\tang^2\theta\\&\quad=-a(A+B\tang\theta+C\tang^2\theta+D\tang^3\theta),\end{aligned}$$

quelle que soit la valeur de θ. Cette condition est donc exprimée par les équations

$$E=-aA,\quad F=-aB,\quad G=-aC,\quad D=0,$$

au moyen desquelles on voit que l'équation de la cubique doit avoir la forme

$$(Ax^2+Bxy+Cy^2)(x-a)+Hx+Ky=0.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

La condition pour qu'une cubique soit la cissoïdale d'elle-même et d'une droite est qu'une de ses asymptotes coïncide avec cette droite et que les deux autres se coupent en un point de la cubique. Ce point est alors le pôle de la cissoïdale.

Il résulte de ce qui précède cet autre théorème, qui contient celui relatif à la strophoïde, précédemment énoncé :

Si deux asymptotes d'une cubique se coupent en un point de cette courbe, et si par ce point on mène une droite quelconque D, *les tangentes à la cubique aux points où elle est coupée par cette droite coupent la troisième asymptote en deux points équidistants du point d'intersection de* D *avec cette dernière asymptote.*

Une classe très importante de cubiques auxquelles ces théorèmes sont applicables est celle des *cubiques circulaires qui passent par leur foyer singulier.* Cette classe de cubiques comprend, en effet, des cubiques considérées par Van Reer et Chasles dans leurs études sur les focales du cône de base circulaire oblique (*Correspondance mathématique de Quetelet,* t. V et VI).

IV.

Voici encore une autre question analogue à la précédente :

Chercher les cubiques qui sont cissoïdales d'elles-mêmes et d'une circonférence par rapport à un point où la cubique et la circonférence se coupent.

En prenant ce point pour origine des coordonnées et la droite qui passe par le centre de la circonférence pour axe des abscisses, l'équation polaire de cette courbe est

$$\rho'' = 2a\cos\theta,$$

et l'identité

$$\rho_1 + \rho_2 = \rho''$$

donne, au moyen d'une analyse semblable à celle qui fut employée précédemment, les conditions

$$E = -2aA,\quad F = -2aB,\quad E = 2aC,\quad F = -2aD,\quad G = 0.$$

L'équation de la cubique doit donc avoir la forme

$$(x^2 + y^2 - 2ax)(Ax + By) + Hx + Ky = 0.$$

Nous avons le théorème suivant :

Les conditions pour qu'une cubique soit cissoïdale d'elle-même et d'une circonférence par rapport au point où ces courbes se coupent sont les suivantes : 1° que la cubique soit circulaire; 2° que le pôle coïncide avec le point où la cubique est coupée par son asymptote réelle; 3° que le centre de la circonférence coïncide avec le foyer singulier de la cubique.