Certificats de géométrie supérieure

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 330-332

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__330_0>

CERTIFICATS DE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE.

Paris.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Une surface étant donnée par les équations*

$$y = ux, \qquad z = v + x\varphi(u, v), \qquad x\varphi'_v(u, 0) + 1 = 0,$$

où φ *est une fonction quelconque des paramètres* u *et* v, *définir géométriquement le réseau formé par les deux familles de courbes* $u =$ *const. et* $v =$ *const. Prouver que ce réseau est conjugué.*

Déterminer les lignes de courbure des surfaces (S) *qu'on obtient en prenant*

$$\varphi = \sqrt{1 + u^2}\,\frac{e^{U+V} + e^{-U+V}}{2},$$

U *étant une fonction arbitraire de* u, *et* V *une fonction arbitraire de* v, *indiquer la nature de ces deux familles de courbes.*

Former l'équation aux dérivées partielles à laquelle doit satisfaire la fonction φ *pour que les plans osculateurs des courbes* $v =$ *const. menés aux divers points de chaque courbe* $u =$ *const. soient parallèles à une droite dont les coefficients directeurs ne dépendent que de* u. *Montrer que la forme générale de* φ *est alors*

$$\varphi = U(u) + U_1(u)V_1(v) + U_2(u)V_2(v),$$

les cinq fonctions mises en évidence étant arbitraires, et que les surfaces S *précédemment considérées sont parmi les surfaces correspondantes.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Étant donnée la surface qui a pour équation*

$$2y^3 - 3xyz + z^2 = 0$$

déterminer ses lignes asymptotiques et construire leurs projections sur le plan des xy, en faisant prendre successivement diverses valeurs à la constante d'intégration.

(Octobre 1905.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *On considère les deux paraboloïdes*

$$x^2+y^2=2az,$$
$$x^2+y^2=-2az,$$

et les droites qui sont tangentes communes à ces deux surfaces. Déterminer les arêtes de rebroussement des développables engendrées par ces droites.

Équations qui déterminent la surface minima ayant pour ligne géodésique la développée d'une parabole.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Étudier les sections par les plans de coordonnées et par des plans parallèles au plan des x, y de la surface lieu du point dont les coordonnées en x, y, z s'expriment d'une manière suivante :*

$$x = u + \frac{u^3}{3} + uv^2,$$
$$y = v^3,$$
$$z = (u^2+v^2)^2 + 2u^2 - 2v^2.$$

(Mars 1905.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Étant donnée l'équation aux dérivées partielles suivantes :*

$$4u\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2 + 4v\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v} + \left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2 = 1 :$$

1° *Intégrer les équations différentielles de ses caractéristiques;*

2° *Montrer que ces caractéristiques sont les lignes géodésiques d'une certaine surface dont l'élément linéaire est*

$$ds^2 = \frac{4u\,dv^2 - 4v\,du\,dv + du^2}{4(u-v^2)};$$

3° *En substituant aux deux variables u et v les suivantes :*

$$v \quad \text{et} \quad \sqrt{u - v^2} = \omega,$$

prouver que la surface est applicable sur des surfaces de révolution. Déterminer les méridiens de ces surfaces de révolution.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Étant donné l'ellipsoïde lieu du point dont les coordonnées rectangulaires s'expriment en fonction de deux paramètres u et v par les formules*

$$x = \sqrt{\frac{a(a-u)(a-v)}{(a-b)(a-c)}},$$

$$y = \sqrt{\frac{b(b-u)(b-v)}{(b-a)(b-c)}},$$

$$z = \sqrt{\frac{c(c-u)(c-v)}{(c-a)(c-b)}}:$$

1° *En déduire l'expression des deux formes quadratiques de différentielles*

$$dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

$$d\gamma\, dx + d\gamma'\, dy + d\gamma''\, dz$$

(*où* γ, γ', γ'' *sont les cosinus directeurs de la normale*);

2° *Former l'équation différentielle des lignes asymptotiques, des lignes de courbure, l'équation aux rayons de courbure principaux.* (Mars 1906.)