Nouvelles annales de mathématiques

Certificats de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 322-329
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__322_1>

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Bordeaux.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Théorie des petits mouvements autour d'une position d'équilibre stable, dans le cas d'un système holonome à deux degrés de liberté.*

II. *Une plaque matérielle infiniment mince a, à l'instant* $t = 0$, *une certaine rotation instantanée donnée* ω_0 *autour d'un point de son plan. A partir de cet instant,* *elle est soumise à l'action d'une force unique inconnue* F *agissant, dans son plan, sur un de ses points* A. *On observe la loi du mouvement que prend le point* A, *et l'on demande de déterminer la loi de la force* F *et le mouvement de la plaque.*

Cas particulier où la plaque part du repos et où le mouvement de A *est rectiligne et uniformément accéléré.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un cercle plonge verticalement dans un liquide homogène pesant, sur la surface duquel ne s'exerce aucune pression; les deux tiers de la surface du cercle sont immergés; déterminer la distance du centre de pression à la surface du liquide.*

Rayon du cercle $= 0^{m},12$.

(Juillet 1906.)

Lille.

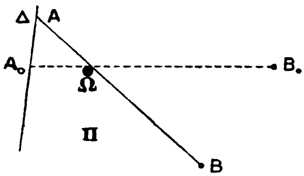
ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Théorie élémentaire de l'effet gyroscopique.*

Après avoir démontré la coïncidence approchée de l'axe de révolution du gyroscope et du moment cinétique résultant du système par rapport au point de suspension, on étudiera les apparences du mouvement et l'on établira la formule classique, en supposant qu'il n'existe qu'une force appliquée, constante en grandeur, direction et sens, sollicitant un point de l'axe de révolution.

PROBLÈMES : I. CINÉMATIQUE. — *Une figure plane se mouvant dans un plan* P, *on demande le lieu des points du plan* P *pour lesquels la vitesse, à un instant donné, du point superposé de la figure mobile :* 1° *est dans un rapport constant soit avec l'accélération totale, soit avec l'accélération tangentielle, soit avec l'accélération normale;* 2° *fait un angle constant avec l'accélération.*

II. DYNAMIQUE. — *Une barre homogène et pesante* AB, *de poids p et de longueur l, est astreinte à se déplacer dans un plan vertical* Π; *l'extrémité* A *y glisse sans frottement sur une droite verticale* Δ; *à l'extrémité* B *est accroché un poids* $\frac{p}{2}$; *cette barre s'appuie, aussi sans frot-*

tement, sur une cheville Ω, *de rayon négligeable, normale*



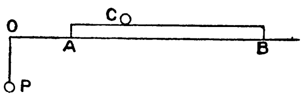
au plan Π *et distante de* Δ *de* $\frac{l\sqrt{3}}{4}$.

1° *Étudier le mouvement de cette barre abandonnée dans une position horizontale* A_0B_0 *sans vitesse initiale;*

2° *Rechercher la position d'équilibre stable de cette barre et étudier les petites oscillations près de cette position d'équilibre.* (Juillet 1906.)

Marseille.

ÉPREUVE THEORIQUE. — *Une droite* AB *pesante et homo-*



gène repose par deux pointes émoussées A *et* B *sur une droite horizontale. La pointe* A *glisse sans frottement, mais la pointe* B *glisse avec frottement. Au point* A *est attaché un fil horizontal, dont on néglige la masse, qui passe sur une très petite poulie* O *et qui porte à son extrémité un poids* P. *Sur* AB *glisse avec frottement un point pesant* C. *Le système est primitivement en repos et le point* C *est en* A. *On abandonne le système à lui-même, trouver son mouvement.*

Les trois corps ont la même masse et le coefficient de frottement est égal à un quart.

On remarquera que la pression en B *varie.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *L'intrados d'une voûte en plein cintre, d'épaisseur constante, a* 12^{m} *de rayon; l'extrados a* 16^{m} *de rayon. Vérifier la stabilité de la voûte en tra-*

çant la courbe des pressions. Le coefficient de frottement est 0,75.

Donner en fonction du poids 2P *de la voûte la poussée horizontale à la culée en supposant que la courbe des pressions passe au tiers extérieur du joint à la naissance et au tiers extérieur de la clef.*

On fera l'épure en prenant 2^{cm} *par mètre.*

(Juillet 1906.)

Nancy.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Envisageons un fil homogène pesant ayant la forme d'un arc de cercle* AB, *de rayon* R, *de longueur* $2l$, *de densité* ε. *Supposons que ce fil rigide soit assujetti à glisser sur un plan horizontal* π.

Chaque élément dm *du fil est attiré par un axe fixe* OX, *situé dans le plan* π, *proportionnellement à sa distance à cet axe et à sa masse* dm; *soit* f *l'intensité de l'attraction exercée sur l'unité de masse à l'unité de distance.*

A l'instant initial on imprime au fil rigide une rotation de n tours à la seconde, dans le sens direct, autour de la perpendiculaire menée au plan π *par l'extrémité* A *du fil; puis on abandonne le fil à son mouvement de glissement sur le plan* π *avec cet état initial des vitesses, la corde* AB *étant supposée à l'instant* $t = 0$ *parallèle à l'axe fixe* OX *à une distance* Δ *de cet axe.*

On demande : 1° *d'étudier le mouvement du fil rigide dans le plan fixe* π; 2° *la pression que le fil exerce sur le plan fixe* π. *On s'attachera particulièrement au cas où*

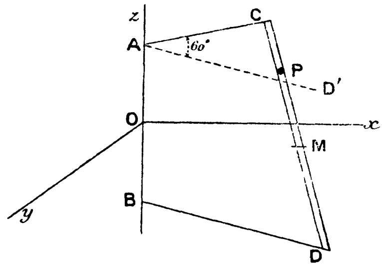
$$R = \frac{20^{cm}}{\pi}, \qquad l = 20^{cm}, \qquad \varepsilon = 7,7,$$

$$f = 3 \text{ dynes}, \qquad n = 8, \qquad \Delta = 100^{cm}.$$

(Juillet 1905.)

Paris.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Un cadre rigide gauche* ABDCA *est mobile autour d'un axe vertical* O*z* *qui renferme le côté* AB *du cadre. Le côté* CD *est un tube creux, de très* *faible section, dans lequel glisse sans frottement un point pesant* P *de masse m. Étudier le mouvement du système d'après les données suivantes : les trois côtés* AB, AC, BD *du cadre ont même longueur l, les côtés* AC, BD *sont per-*



pendiculaires à AB, *et* (AD′ *désignant une demi-droite parallèle à* BD *et de même sens*) *l'angle* D′AC *compté positivement autour de la demi-verticale ascendante* O*z est égal à* 60°. *Enfin, le moment d'inertie du cadre seul autour de* O*z est égal à* $4ml^2$.

Étudier, en particulier, le mouvement qui a lieu quand on abandonne le système sans vitesse, le point P *occupant le milieu* M *du côté* CD.

On pourra définir la position du système par l'angle θ *que fait avec un plan vertical fixe* xOz, *le plan* MO*z et par la distance* MP $= \lambda$ *comptée positivement dans le sens* CD.

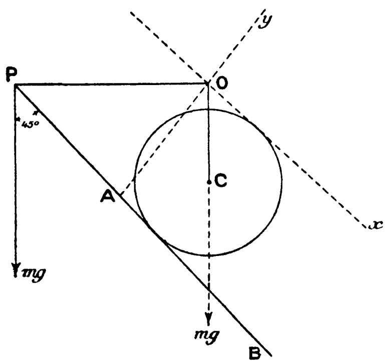
ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un cercle solide, plein, homogène et pesant, dont le rayon est égal à un mètre et la masse à* 500^g, *est lancé dans le plan vertical* xOy *sur une droite horizontale fixe, dépolie,* Ox. *A l'instant initial* $t = 0$, *le centre* C *du cercle est animé d'une vitesse horizontale de* 10^m *par seconde, dans le sens* Ox, *et le disque tourne autour de* C *avec une vitesse de* 5 *tours à la seconde, dans le sens* xOy (Oy *demi-verticale ascendante*). *Le coefficient de frottement entre le cercle et la droite* Ox *étant* 0,20, *on demande de calculer :* 1° *l'instant* t_1, *où la vitesse du centre* C *du cercle changera de sens ;* 2° *l'instant* t_2 *où* C *reprendra sa position initiale;* 3° *l'instant* t_3 *où le glisse-*

ment sera détruit par le frottement; 4° *la valeur (en unités C. G. S.) de la force vive perdue par le cercle entre les instants* $t = 0$ *et* $t = t_3$.

NOTE. — *On adoptera comme valeur de* g *(accélération de la pesanteur)* : $g = 981$ (C. G. S.). *On négligera le frottement de roulement.*

(Octobre 1905.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Un fil parfaitement flexible, inextensible, et sans masse, de longueur* $4l$, *est attaché par une de ses extrémités à un point matériel pesant* P, *et par*

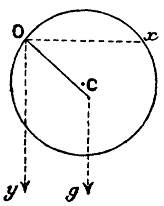


l'autre extrémité au centre C *d'un cercle solide homogène et pesant, de rayon* l *dont la masse* m *est égale à celle du point* P. *Le système étant abandonné sans vitesse, dans un plan vertical* xOy, *on demande d'étudier son mouvement, en supposant que le fil glisse sans frottement sur le point fixe* O, *et que le point* P *et le disque* C *glissent sans frottement sur une droite* AB *inclinée à* 45° *sur la verticale, et située au-dessous de* O *à une distance de* O *égale à* $2l$.

Calculer la tension du fil POC *à l'instant initial.*

La disposition initiale du fil étant celle de la figure, et l'angle initial de OC *avec la direction* AB *étant de* 45°, *décider si le fil reste tendu ou non au début du mouvement.*

Épreuve pratique. — *Une circonférence de cercle homogène et pesante (cerceau) de centre* C *et de diamètre égal à* 1^m *est fixée par un de ses points* O. *Le cerceau étant*



abandonné sans vitesse initiale dans le plan vertical xOy, *calculer :*

1° *La durée des oscillations infiniment petites du pendule composé ainsi formé;*

2° *L'angle initial de* OC *avec la verticale descendante étant, non plus très petit, mais égal à* 30 *degrés, calculer la réaction qu'exerce l'appui* O *sur le cerceau à l'instant où* C *traverse la verticale* Oy, *ainsi que la durée, à* $\frac{1}{100}$ *de seconde près, d'une demi-oscillation du cerceau.*

(Juillet 1905.)

Poitiers.

Epreuve théorique : Cinematique. — *Une figure invariable se meut dans son plan de manière que deux de ses droites demeurent tangentes à un même arc de cycloïde. Trouver dans ce mouvement les deux courbes qui roulent sans glisser l'une sur l'autre.*

Dynamique. — *Dans un plan vertical* xOy (Oy *vertical et dirigé vers le haut*) *une barre homogène pesante* AB *de masse* M *et de longueur* $2l$ *peut tourner sans frottement autour de son milieu* O; *une sphère de rayon très petit et de masse m est fixée en* A; *en* B *est attaché un pendule simple constitué par un fil sans masse de longueur r et par une masse m fixée à son extrémité c.*

Former les équations du mouvement du système. Y a-t-il des positions d'équilibre stable? Étudier les petits mouvements dans leur voisinage.

(*On suppose que le pendule peut osciller librement en dehors du plan vertical* xOy.)

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère l'arc de cycloïde défini par les formules*

$$x = R(\theta - \sin\theta),$$
$$y = R(1 - \cos\theta),$$

où θ *varie de* 0 *à une valeur* α *inférieure à* π :

1° *Trouver les coordonnées* ξ, η *du centre de gravité de l'aire comprise entre cet arc, l'axe des* x *et l'ordonnée correspondant à* $\theta = \alpha$;

2° *Calculer, en supposant l'aire précédente homogène et de densité* δ, *le moment d'inertie de l'aire par rapport à l'axe des* y.

Application au cas particulier $\alpha = \pi$.

(Juillet 1905.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Le mouvement d'un trièdre trirectangle* (T) *ou* ($Oxyz$), *par rapport à un trièdre analogue* (T_1) *ou* ($O_1x_1y_1z_1$), *étant donné par les projections* $\xi, \eta, \zeta, p, q, r$ *de la translation et de la rotation instantanées sur les axes mobiles, on demande à un instant* t :

1° *Les coordonnées du centre de courbure de la trajectoire du point* M (x, y, z);

2° *Les lieux géométriques des points* (x, y, z) *dont l'accélération normale* (ou *l'accélération tangentielle*) *est nulle.*

II. *Une parabole concave vers le haut peut tourner librement autour de son axe qui est vertical : les extrémités d'une barre homogène pesante* AB *de longueur* $2l$ *sont assujetties à glisser sans frottement sur la parabole, dont on regarde la masse comme nulle.*

Équations du mouvement du système. Calcul des réactions en A *et* B. *Positions d'équilibre relatif. Étude des petits mouvements dans leur voisinage.* (Juin 1906.)