NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 286-288
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__286_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2020.

(1905, p. 479.)

On considère tous les triangles MPQ *inscrits dans un cercle et tels que* MP *et* MQ *aient des directions données. Le lieu des centres des cercles tritangents aux triangles* MPQ *se compose de quatre cercles.* (E.-N. BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. ABRAMESCU.

Soient I, I′, I″, I‴ les centres des cercles inscrit et exinscrit correspondants aux sommets M, P, Q. On remarque que l'angle

$$\widehat{PMQ} = \text{const.},$$

et que les milieux des arcs MP, MQ sont des points fixes A, B. De même

$$\widehat{PIQ} = \frac{\widehat{PMQ}}{2} + 90° = \text{const.},$$

donc le point I décrit un segment de cercle C décrit sur AB et capable d'un angle constant.

De même, on a

$$IA = I''A, \qquad IB = I'''B,$$

donc les lieux des points I'' et I''' s'obtiendront en prenant sur la sécante AI une longueur $I''A = IA$; comme A et B sont fixes, les lieux des points I'' et I''' seront des cercles égaux au cercle C et tangents à C aux points A et B respectivement.

Désignant par D le point où II' coupe le cercle PMQ, on a

$$ID = DI'.$$

Ainsi, le lieu de I' s'obtient en menant une sécante de direction donnée, perpendiculaire à AB $\left(\text{la bissectrice de } \widehat{PMQ} \text{ restant parallèle à elle-même}\right)$, et coupant deux cercles C et PMQ en des points I et D, et l'on prend extérieurement

$$DI' = DI.$$

Donc, le lieu de I' est un cercle ayant son centre sur la ligne des centres des cercles PMQ et C.

Autre solution par M. G. Painvin.

2024.

(1905, p. 528.)

Soient C *une cubique gauche,* aa', bb', cc' *trois cercles de cette courbe, génératrices d'une quadrique qui la contient tout entière.*

Démontrer que les quatre plans (abc), $(ab'c')$, $(a'bc')$, $(a'b'c)$ *passent par un même point d. De même les quatre* *plans* $(a'b'c')$, $(a'bc)$, $(ab'c)$, (abc') *passent par un même point* d'. *La droite* dd' *est une corde de la cubique* C, *et les points* d *et* d' *sont conjugués harmoniques par rapport aux extrémités de cette corde.* (R. BRICARD.)

SOLUTION

Par M. R. B.

Je m'appuierai sur le lemme suivant :

Soient, sur une courbe unicursale G, (a, a') *et* (b, b') *deux couples de points : ils déterminent sur* G *une involution dont les points doubles sont* α, β. *Je dis que* (a, b), (a', b'), (α, β) *sont trois couples de points conjugués dans une certaine involution déterminée sur* G.

On peut évidemment supposer que G est une conique. Il résulte alors de l'hypothèse que aa' et bb' vont concourir au pôle de $\alpha\beta$ par rapport à G; ab, $a'b'$ vont donc, en vertu d'un théorème bien connu, concourir sur $\alpha\beta$, ce qui démontre la proposition.

Cela posé, les couples de points (a, a'), (b, b'), (c, c') de l'énoncé sont conjugués dans une involution déterminée sur C, et dont je désignerai les points doubles par α, β. En vertu du lemme précédent, (a, b), (a', b') et (α, β) sont trois couples de points conjugués dans une nouvelle involution. Autrement dit ab, $a'b'$ et $\alpha\beta$ sont trois génératrices, d'un même système, d'une quadrique (Q) que contient C.

Considérons la génératrice du second système de (Q) qui passe par le point c : elle rencontre ab, $a'b'$ et $\alpha\beta$. Cela revient à dire que les plans (abc) et $(a'b'c)$ passent par un même point d de $\alpha\beta$. On voit de même que les plans $(ab'c')$ et $(a'bc')$ passent par le point d.

On reconnaîtra de la même façon l'existence du point d'.

Les plans (abc), (abc'), $(ab\alpha)$, $(ab\beta)$ forment un faisceau harmonique, puisqu'ils sont déterminés par une même corde de C et par quatre points c, c', α, β qui forment une division harmonique sur cette courbe. Il en est de même, par conséquent, des points d, d', α et β, où ces plans rencontrent respectivement la droite $\alpha\beta$. La dernière partie de l'énoncé se trouve ainsi établie.