Nouvelles annales de mathématiques

H. Laurent

Sur un théorème de Chasles et d'Abel

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 266-270

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__266_1>

[$M^2 2e$]

SUR UN THÉORÈME DE CHASLES ET D'ABEL;

Par M. H. LAURENT.

On connaît ce théorème de Chasles :

Si à une surface algébrique on mène des plans tangents parallèles à un plan donné P, *le centre des moyennes distances des points de contact reste fixe quand on fait varier le plan* P.

On sait que Chasles pensait que son théorème ne pourrait pas être démontré par l'analyse, on sait aussi que Liouville en a donné une démonstration analytique, mais en imaginant une nouvelle méthode d'élimination qui d'ailleurs est très intéressante en elle-même. Je me propose dans ce qui suit de donner une nouvelle démonstration du théorème de Chasles : 1° en l'étendant à l'hyperespace; 2° en montrant que, même dans l'espace à trois et à deux dimensions, il est encore susceptible d'être considérablement généralisé; 3° en montrant qu'il n'est qu'un cas particulier du théorème d'Abel.

Les quelques lignes qui suivent sont extraites d'un travail sur la pangéométrie que je me propose de publier un jour quand les circonstances me le permettront.

Soit $f(x_1, \ldots, x_n)$ un polynome entier en $x_1, \ldots, x_n$.

Considérons la surface représentée par l'équation

$$f = 0 \tag{1}$$

dans l'espace à n dimensions, menons-lui les plans tangents parallèles au plan

$$l_1 x_1 + l_2 x_2 + \ldots + l_n x_n = 0,$$

les points de contact seront donnés par la formule (1) et les suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} : l_1 = \frac{\partial f}{\partial x_2} : l_2 = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n} : l_n. \tag{2}$$

Posons

$$\frac{\partial f}{dx_i} = f_i, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j} = f_{ij},$$

enfin, désignons par s les rapports (2), les équations (1) et (2) pourront être remplacées par les suivantes :

$$f = 0, \qquad f_1 - s l_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad f_n - s l_n = 0. \tag{3}$$

Considérons les l comme des variables indépendantes et différentions ces équations, nous aurons :

$$\begin{aligned}
&f_1 \, dx_1 + f_2 dx_2 + \ldots + f_n \, dx_n &&= 0,\\
&f_{11} dx_1 + f_{12} dx_2 + \ldots + f x_n dx_n + l_1 ds - s dl_1 &&= 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &&,
\end{aligned}$$

d'où, en résolvant par rapport à dx, et en appelant D le déterminant,

$$\frac{\partial(f, f_1 - l_1 s, \ldots, f_n - l_n s)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n, s)},$$

l'on tire

$$(4) \qquad dx_1 = \frac{s}{D}\left[\frac{\partial D}{\partial f_{11}} dl_1 + \ldots + \frac{\partial D}{\partial f_{n1}} dl_n\right],$$

le degré de D par rapport à s, x_1, ..., x_n est, en appelant m le degré de f,

$$m - 1 + (m-2)n = mn + m - 2n - 1 = \delta;$$

le degré du facteur de $\frac{1}{D}$ dans le second membre est $\delta - (m-1)$, donc, en vertu d'un théorème bien connu de Jacobi, si l'on ajoute toutes les équations analogues à (4) et relatives à toutes les solutions des équations (3), on aura

$$\Sigma dx_1 = 0, \quad \text{de même} \quad \Sigma dx_2 = 0. \quad \ldots.$$

On voit donc que le centre des moyennes distances des points de contact des plans parallèles au plan $l_1 x_1 + \ldots + l_n x_n = 0$ ne dépend pas des coefficients l_1, l_2, ..., l_n. C'est le théorème de Chasles qui se présente comme un cas particulier du célèbre théorème d'Abel.

Il y a plus, ce théorème de Chasles peut être considérablement généralisé, même pour l'espace à deux ou trois dimensions, et, en effet, de ce que dans la formule (4) le coefficient de $\frac{1}{D}$ est de degré $\delta - (m-1)$, il en résulte, non seulement que Σdx est nul, mais encore que $\Sigma H dx = 0$.

Pourvu que H soit un polynome dont le degré ν tel que

$$\delta - (m-1) + \nu < \delta$$

ou que

$$v < m - 1.$$

Si donc m est au moins égal à 3,

$$\begin{array}{llll} \Sigma x_1^2, & \Sigma x_2^2, & \Sigma x_3^2, & \ldots, \\ \Sigma x_1 x_2, & \Sigma x_1 x_3, & \Sigma x_2 x_3, & \ldots \end{array}$$

seront constants, c'est-à-dire indépendants de l_1, l_2, ..., il en sera de même de

$$\Sigma(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2),$$

ce qui constitue autant de théorèmes de géométrie; en particulier, on voit que :

Si l'on mène à une surface les plans parallèles à un plan donné, la somme des carrés des rayons vecteurs des points de contact issus d'un point fixe sera constante quelle que soit l'orientation des plans tangents. (Ce théorème n'est pas vrai pour les surfaces du second degré.)

Si m est au moins égal à 4, Σx_1^3, $\Sigma x_1^2 x_2$, ... seront également indépendants des quantités l_1, l_2, ..., mais ces théorèmes sont moins intéressants parce qu'ils sont moins susceptibles d'une interprétation géométrique.

Voici quelques énoncés de théorèmes qu'il serait peut-être difficile de démontrer par les procédés ordinaires de la géométrie :

1° Si l'on mène des plans tangents parallèles à une surface du troisième degré ou de degré supérieur, la somme des carrés des cordes qui joignent les points de contact deux à deux est indépendante de l'orientation de ces plans;

2° Si l'on considère une surface et les points où le produit des rayons de courbure principaux a une valeur donnée, ainsi que l'angle de sa normale avec une droite fixe, le centre des moyennes distances de ces points aura une position indépendante de ces valeurs données.

3° Les mêmes choses étant posées, la somme des carrés des cordes joignant les points en question deux à deux sera constante.

4° Si l'on considère des surfaces de même degré en nombre $n-1$ dans un espace à n dimensions et si on leur mène des plans tangents passant par un point donné P, le centre des moyennes distances des points de contact sur chaque surface restera fixe quand on fera varier le point P.

5° Si l'on considère une surface

$$f(x, y, z) = 0$$

et les points où les deux paramètres

$$\Delta_1 f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2,$$

$$\Delta_2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

ont des valeurs données, le centre des moyennes distances de ces points ne variera pas quand on fera varier $\Delta_1 f$ et $\Delta_2 f$.

Le lecteur pourra inventer ainsi une foule de théorèmes, relatifs, par exemple, à des familles de courbes ou de surfaces. Ce qui précède suffit pour montrer tout le parti qu'on peut tirer de la méthode que nous venons d'indiquer.