NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. LAURENT

Sur les substitutions linéaires qui laissent une forme quadratique invariante

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 6 (1906), p. 234-237

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__234_0>

[B10a]

SUR LES SUBSTITUTIONS LINÉAIRES QUI LAISSENT UNE FORME QUADRATIQUE INVARIANTE ;

PAR M. H. LAURENT.

On a donné bien des moyens pour trouver les substitutions qui transforment une forme quadratique en elle-même ou qui laissent cette forme invariante. Je crois que la solution que je vais indiquer aura le mérite de la simplicité lorsqu'il s'agira d'applications. Soient a_{ij} des constantes et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les variables,

$$f = \sum a_{ij} x_i x_j$$

une forme à n variables. On peut exprimer la condition d'invariance au moyen de la formule

$$\sum a_{ij} x_i x_j = \sum a_{ij} y_i y_j$$

ou

$$\sum a_{ij} (y_i y_j - x_i x_j) = 0,$$

$y_1, \ldots, y_n$ désignant de nouvelles variables ; ou, en mettant les carrés en évidence,

$$\sum a_{ii} (y_i^2 - x_i^2) + \sum a_{ij} (y_i y_j - x_i x_j) = 0.$$

Sous le second signe $\sum$, i et j seront alors différents et l'on aura

$$\sum a_{ii} (y_i - x_i)(y_i + x_i)$$
$$+ \sum a_{ij} \tfrac{1}{2} [(y_i - x_i)(y_j + x_j) + (y_i + x_i)(y_j - x_j)] = 0 ;$$

ce qui revient à

$$\sum a_{ij}(y_i - x_i)(y_j + x_j) = 0,$$

ou, si l'on désigne par f_i la demi-dérivée de f relative à x_i :

$$(1) \qquad \sum (y_i - x_i) f_i (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots) = 0.$$

Adjoignons à cette équation les suivantes, où les c_{ij} sont indépendants des x et des y :

$$(2) \qquad \begin{cases} c_{11}(x_1 - y_1) + \ldots + c_{1n}(x_n - y_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{n1}(x_1 - y_1) + \ldots + c_{nn}(x_n - y_n) = 0; \end{cases}$$

nous supposerons que les n équations (2) se réduisent à $n-2$ distinctes, le système (1), (2) déterminera alors les $y_i - x_i$ en fonction des $y_i + x_i$ au moyen d'équations de la forme

$$(3) \qquad \begin{cases} y_1 - x_1 = k_{11} f_1 + k_{12} f_2 + \ldots + k_{1n} f_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n - x_n = k_{n1} f_1 + k_{n2} f_2 + \ldots + k_{nn} f_n, \end{cases}$$

les k_{ij} désignant des quantités indépendantes des x et des y; quant à f_i il est mis pour abréger à la place de $f_i(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots)$, d'ailleurs il faudra supposer

$$k_{ii} = 0, \quad k_{ij} + k_{ji} = 0.$$

Vérifions que les équations (3) représentent bien les substitutions laissant f invariante. A cet effet multiplions la première formule (3) par f_1, la seconde par $f_2 \ldots$, la dernière par f_n et ajoutons; nous aurons

$$\sum (y_i - x_i) f_i = 0,$$

équation qui en vertu de (1) est équivalente à

$$\sum a_{ij} x_i x_j = \sum a_{ij} y_i y_j.$$

En particulier, si $f = \Sigma x_i^2$, les formules (3) deviennent

$$y_1 - x_1 = k_{11}(y_1 + x_1) + \ldots + k_{1n}(y_n + x_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et définissent une substitution orthogonale de déterminant $+1$.

Les formules (3) qui renferment $\frac{n(n-1)}{2}$ paramètres k_{ij} ont cela de remarquable que les y s'expriment en fonction des x sous forme rationnelle, en sorte que, si les nombres k_{ij} sont rationnels, les coefficients de la substitution seront des fonctions rationnelles des a_{ij} à coefficients rationnels.

Interprétons géométriquement les résultats qui précèdent : $f = 0$ représente une surface dans l'espace à n dimensions, cette surface est un cône. La substitution (3) laisse ce cône invariant, mais elle laisse encore invariantes n droites.

Posons, en effet,

$$y_i = s x_i;$$

les équations (3) deviennent

$$(s-1)x_1 = (s+1)[k_{11} f_1(x_1, x_2, \ldots) + \ldots + k_{1n} f_n(x_1, x_2, \ldots)]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ou

$$\frac{s-1}{s+1} x_1 = x_1 f_1(k_{11}, \ldots, k_{1n}) + x_2 f_2(k_{11}, \ldots, k_{1n}) + \ldots,$$

$$\frac{s-1}{s+1} x_2 = x_1 f_1(k_{21}, \ldots, k_{2n}) + x_2 f_2(k_{21}, \ldots, k_{2n}) + \ldots,$$

l'élimination des x fournit une équation du degré n en s, à chaque racine de cette équation correspondent des valeurs des x, que la substitution (3) multiplie simplement par s, et les valeurs des n définissent une droite passant par l'origine, droite qui reste invariante, quoique ses points ne soient pas invariants.

Il ne sera peut-être pas inutile de faire observer que les substitutions (3) que nous avons trouvées ont pour déterminant $+1$, car, pour

$$k_{11} = k_{12} = \ldots = 0,$$

on a

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad \ldots, \quad x_n = y_n.$$

Il ne serait pas difficile de se procurer des substitutions du déterminant -1 en changeant quelques signes dans les formules (3).